МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАПИСКИ

Том 7, тетрадь 3

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

Свердловск
1970

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАПИСКИ, т. УП, ТЕТРАДЬ 3 (1970)

Ю.Ш.ГУРЕВИЧ

Машины Минского и случай $\forall\exists\forall\ \&\ \exists^{\infty}$ проблемы разрешения

§ 1

Посредством $\Phi(\forall\exists\forall\&\exists^{\infty}, (\tau, 1))$ мы обозначаем множество всех таких не содержащих свободных индивидных переменных формул α чистого исчисления предикатов первой ступени, что совокупность предикатных переменных формулы α состоит из одной двуместной переменной и τ одноместных и α имеет вид

$$\alpha = \forall x \exists u \forall y \mathfrak{A}\ \&\ \exists u_1 \ldots u_n \mathfrak{B}.$$

Чистота исчисления предикатов означает отсутствие постоянных предикатов. В частности, отсутствует знак равенства.

Напомним, что класс формул Φ исчисления предикатов называется <u>классом сведения по выполнимости</u>, если существует алгоритм A, который произвольную формулу α исчисления предикатов перерабатывает в такую формулу β из Φ, что формула α выполнима тогда и только тогда, когда β выполнима. Аналогично определяется класс сведения по конечной выполнимости, т.е. по выполнимости в конечных областях. Если упомянутый алгоритм A осуществляет одновременное сведение и по выполнимости и по конечной выполнимости, класс называют <u>классом консервативного сведения</u>.

Используя идею Бюхи из (1) об экономной записи формулами исчисления предикатов работы машин Тьюринга, автор доказал (см. /2/ и /3/), что при некотором небольшом τ класс $\Phi(\forall\exists\forall\&\exists^{\infty}, (\tau, 1))$ есть класс консервативного сведения. Содержание настоящей заметки составляет иллюстрация того, что упомянутое доказательство может быть упрощено за счёт применения машин Минского. Ради краткости мы будем говорить лишь о сведении по выполнимости.

По-прежнему остаётся открытым вопрос, существует ли алгоритм, распознающий выполнимость в классе $\Phi(\forall\exists\forall \,\&\, \exists^{\infty}, (0,1))$.

Настоящее изложение использует лишь сведения из [4].

§ 2

Описание машин Минского есть в [4]. Будем говорить, что двухленточная машина Минского начинает с натурального числа n, если в начальный момент состояние машины есть q_1 и на первой ленте машина обозревает ячейку номера n, а на второй ленте машина обозревает ячейку номера 0. Другими словами, двухленточная машина Минского начинает с n, если в начальный момент конфигурация машины есть $(n, 0; q_1)$.

Фиксируем эффективную нумерацию формул чистого исчисления предикатов. Номер формулы α будем обозначать $[\alpha]$. Положим, $f(n) = 0$, если $n = [\alpha]$ и α не выполнима (т.е. $\neg\alpha$ есть теорема исчисления предикатов), и $f(n)$ не определено, если n не есть номер формулы или n есть номер выполнимой формулы. Функция f частично рекурсивна. В силу теоремы Минского (см. /4/, стр. 330) существует такая машина Минского M_* с двумя лентами, которая, начиная с 2^n, переходит со временем в заключительное состояние q_0 при $f(n) = 0$ и работает вечно, если $f(n)$ не определено.

§ 3

Добавим к чистому исчислению предикатов символ $'$ переменной операции. Следующее утверждение известно и очевидно.

Л е м м а 1. Пусть $\alpha = \forall x \exists u \mathfrak{A}$ и $\beta = \forall x \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ получается из $\mathfrak{A}$ заменой u на x'. Каково бы ни было множество M, формулы α и β одновременно выполнимы или не выполнимы в M.

Л е м м а 2. Средствами исчисления предикатов из формулы

$$\forall xy[(Tx \to Tx').(R_\nu x \to R_\nu^* x').$$
$$.(Tx.Kxy \to Kyx').$$
$$.(Ty.R_\nu^* y.\mathcal{N}_\nu x.Kxy \to Kyx')].$$

выводится формула $(Tx.R_\nu x.\mathcal{N}_\nu y.Kxy \to Kx'y')$.

Здесь K есть двуместная предикатная переменная, а T, R_ν, R_ν^* и $\mathcal{N}_\nu$ – одноместные. Символы конъюнкции заменены точками. Скобки у предикатных переменных и впредь будем часто опускать.

Вместо доказательства леммы 2 позволим себе отослать читателя к рис. 1.

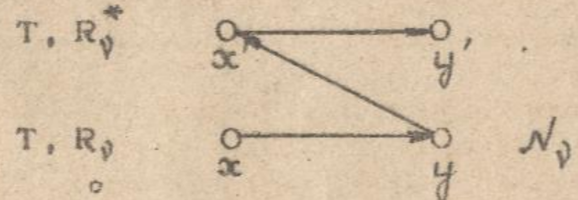

Рис. 1.

Л е м м а 3. Средствами исчисления предикатов из формулы

$$\forall xy(Tx \to Tx').(L_\nu x \to L_\nu^* x').$$
$$.(Tx.Kxy \to Kyx').$$
$$.(Ty.L_\nu^* y.\mathcal{N}_\nu x'.Kx'y \to Kyx)].$$

выводится формула $(Tx.L_\nu x.\mathcal{N}_\nu y'.Kxy' \to Kx'y)$ (рис. 2).

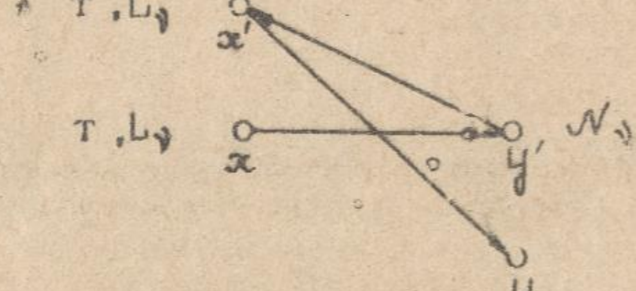

Рис. 2

Обозначим посредством $\mathfrak{A}_0(x,y)$ конъюнкцию следующих формул:

$$Ax \sim \neg Ax',$$
$$(Ax \sim Ay).\,Kxy \to Kx'y,$$
$$(Ay \sim \neg Ax).\,Kyx \to Kyx',$$
$$(Ay \sim Ax).\,Kyx.\,By \to Bx'.$$

Л е м м а 4. Средствами исчисления предикатов из формул $\forall xy\,\mathfrak{A}(x,y)$, $\bigwedge\limits_{i\leq n} Au_i$, $\bigwedge\limits_{i<n} Ku_{i+1}u_i$ и Bu_n выводится $Bu_0^{(n)}$.

Здесь $u_0^{(n)}$, есть результат n-кратного применения операции $'$.

И снова вместо доказательства мы позволим себе отослать читателя к рисунку (рис. 3).

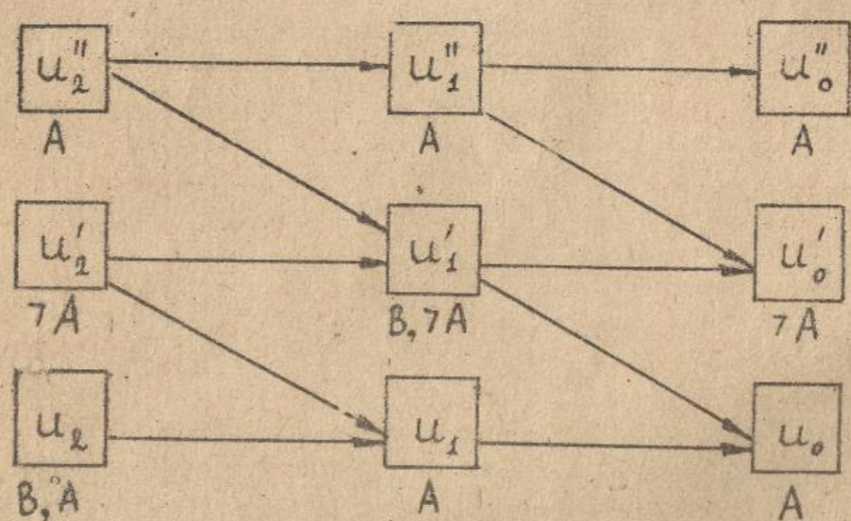

Рис. 3.

§ 4

Обозначим посредством $\mathfrak{B}_0(x,y)$ конъюнкцию выписанных ниже формул 1-8. В скобках мы даём содержательную интерпретацию. Индекс ν везде принимает значения 1 и 2 и интерпретируется как номер ленты. Мы будем считать, что в машине M^* нет команд, оставляющих на места хотя бы одну головку.

Конъюнкты формулы $\mathscr{B}_0(x, y)$:

1. $Tx \to Tx'$.

(Tx интерпретируется так: x есть момент времени, а операция $'$ – так: $x' = x + 1$.)

2. $\mathcal{N}_\nu x \to \mathcal{N}_\nu x'$.

($\mathcal{N}_\nu x$ интерпретируется так: x есть номер ячейки ν-й ленты.)

3. $R_\nu x \sim \neg L_\nu x$, $R_\nu x \to R^*_\nu x'$, $L_\nu x \to L^*_\nu x'$.

($R_\nu x$ интерпретируется так: в момент x машина получает команду сдвинуть ν-ую головку вправо. Аналогично интерпретируется $L_\nu x$. Первая из трёх формул настоящего пункта соответствует нашей договорённости относительно того, что в программе машины M^* нет команд, оставляющих на месте ν-ую головку. Так как ν принимает значения 1 и 2, то настоящий пункт на самом деле 6 конъюнктов формулы $\mathscr{B}_0(x, y)$.)

4. $Tx \,.\, \mathcal{N}_\nu y \,.\, Kxy \to (\mathcal{Z} y \sim \mathcal{Z}_\nu x)$.

(При Tx и $\mathcal{N}_\nu y$ предикат Kxy интерпретируется так: в момент x машина обозревает на ν-й ленте ячейку номера y. $\mathcal{Z} y$ интерпретируется так: $y = 0$, а $\mathcal{Z}_\nu x$ так: в момент x машина M^* обозревает на ленте номера ν ячейку номера 0).

5. $Tx \,.\, q_i x \,.\, \neg^{\varepsilon_1}\mathcal{Z}_1 x \,.\, x\neg^{\varepsilon_2}\mathcal{Z}_2 x \to$
$\to q_j x' \,.\, \neg^{\delta_1} R_1 x \,.\, \neg^{\delta_2} R_2 x$.

($q_i x$ интерпретируется так: в момент x машина M^* находится в состоянии q_i. ε_ν принимает значения 0 и 1. При этом $\neg^0$ есть пустое слово, а $\neg^1$ есть просто $\neg$. Далее, каждое δ_ν также есть 0 или 1. И j, и δ_1, и δ_2 являются функциями от i, ε_1 и ε_2. Настоящий пункт даёт столько конъюнктов формулы $\mathscr{B}_0$, сколько команд в программе машины M^*.)

6. $Tx \,.\, Kxy \to Kyx'$,
$Ty \,.\, R^*_\nu y \,.\, \mathcal{N}_\nu x \,.\, Kxy \to Kyx'$,
$Ty \,.\, L^*_\nu y \,.\, \mathcal{N}_\nu x' \,.\, Kx'y \to Kyx$.

(Формулы настоящего пункта описывают, какие ячейки будут обозреваться в момент x'. См. леммы 2 и 3.)

7. $Tx \,.\, \mathcal{Z} x \to q_1 x$.

(В начальный момент машина M^* находится в состоянии q_1.)

8. $Tx \,.\, \mathcal{Z} x \,.\, \mathcal{N}_1 y \,.\, By \to Kxy$,
$Tx \,.\, \mathcal{Z} x \,.\, \mathcal{N}_2 y \,.\, \mathcal{Z} y \to Kxy$.

(В начальный момент машина M^* обозревает на первой ленте ячейку, отмеченную предикатом В, а на второй ленте ячейку номера 0.)

Лемма 5. Пусть машина M^* начинает с n и в момент t находится в состоянии q_i и обозревает на первой ленте ячейку номера K, а на второй ленте ячейку номера l. Тогда из формул $\forall xy\, \mathcal{L}_0(x,y)$, Tw, Zw, $\mathcal{N}_1 u_0$, Zu_0, $Bu_0^{(n)}$, $\mathcal{N}_2 v_0$, Zv_0 средствами исчисления предикатов выводится

$$q_i w^{(t)} \text{ и } Kw^{(t)} u_0^{(\kappa)} \text{ и } Kw^{(t)} v_0^{(l)} .$$

Доказательство – очевидной индукцией по t.

§ 5

Пусть $\varphi(n) = \forall xy\,[\mathcal{L}_0(x,y)\,.\,\neg q_0 x\,.\,(\neg Tx\,.\,\neg Ty \to \mathfrak{A}(x,y)] \,\&\, \exists u_0 \ldots u_n v_0 w\,[Tw\,.\,Zw\,.\,\mathcal{N}_1 u_0\,.\,Zu_0\,.\,\mathcal{N}_2 v_0\,.\,Zv_0\,.\,\bigwedge\limits_{i \le n} Au_i\,.\,\bigwedge Ku_{i+1} u_i\,.\,Bu_n]$.

Лемма 6. Пусть α есть выполнимая формула чистого исчисления предикатов и $n = 2^{[\alpha]}$. Тогда формула $\varphi(n)$ тоже выполнима.

Мы позволим себе опустить построение модели для $\varphi(n)$. Это более или менее очевидно. Во всяком случае после знакомства с построением соответствующей модели в [3].

Лемма 7. Пусть $n = 2^{[\alpha]}$ и формула $\varphi(n)$ выполнима. Тогда и формула α выполнима.

<u>Доказательство</u>. Предположим, что формула α не выполнима. И пусть машина M^* начинает с n. В силу определения машины M^* в некоторый момент времени она

попадёт в заключительное состояние q_0. В силу леммы 5 из $\varphi(n)$ выводятся $\exists x q_0 x$. С другой стороны, из $\varphi(n)$ очевидным образом выводится $\forall x \neg q_0 x$. Получили противоречие с выполнимостью $\varphi(n)$. Лемма 7 доказана.

В силу лемм 6 и 7 класс всех $\varphi(n)$ есть класс сведения по выполнимости. В силу леммы 1 классом сведения по выполнимости является при некотором τ класс

$\Phi(\forall\exists\forall \& \exists^\infty, (\tau, 1))$.

Литература

1. T.R. Büchi, Türing Machines and the Entscheidungsproblem, Math. Ann., 148, 201-213.
2. Ю.Ш.Гуревич. ДАН СССР, 166; 5 (1966) 1032-1034.
3. Ю.Ш.Гуревич. Алгебра и логика, 5:2 (1966) 25-55.
4. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.,Изд-во 1965.

Поступила 24.1.1969г.