АКАДЕМИЯ НАУК СССР • СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

И Н С Т И Т У Т   М А Т Е М А Т И К И

АЛГЕБРА И ЛОГИКА

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

Том 8   Выпуск 6   1969

Н О В О С И Б И Р С К

Алгебра и логика, 8, № 6 (1969), 640-642.

И кто возьмется диктовать,
что легко и что трудно ?

УДК 518.5

ПРОБЛЕМА РАЗРЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ РАЗРЕШЕНИЯ

Ю.Ш.ГУРЕВИЧ

1. Вопрос А: существует ли алгоритм, который по данной теории Т распознает, является ли она разрешимой?

Ограничим и уточним вопрос А. Пусть L есть обычный язык логики предикатов первой ступени. Для каждой формулы α из L пусть L_α есть такой подъязык языка L, символы предикатов которого суть символы предикатов из α. Далее, пусть T_α есть теория в языке L_α с единственной аксиомой α. Положим $S = \{\alpha : T_\alpha$ разрешима $\}$, $\overline{S} = \{\alpha : T_\alpha$ неразрешима $\}$.

Вопрос Б1: является ли S рекурсивно перечислимым?

Вопрос Б2: является ли $\overline{S}$ рекурсивно перечислимым?

Ниже с помощью замечательной работы Ганфа [1] будут даны отрицательные ответы на вопросы Б1 и Б2. +

Неперечислимость $\overline{S}$ легко показать непосредственно. Столь же просто установить неперечислимость множества $\{\alpha : T_\alpha$ не полна$\}$. Автору неизвестно, является ли перечислимым множество $\{\alpha : T_\alpha$ полна $\}$.

2. Пусть T есть теория в языке L с рекурсивным множеством аксиом и M_T есть машина Тьюринга, которая для произвольной формулы α языка L проверяет, является α аксиомой T или нет. В работе [1] Ганф строит машину Тьюринга M, имеющую M_T в качестве сменной приставки, и конечно аксиоматизируемую теорию $F(T)$, описывающую работу машины M с приставкой M_T. При этом T и $F(T)$ имеют много общего и, в частности, $F(T)$ разрешима в том и только том случае, когда T разрешима. Пусть машина M_T' делает лишь половину работы машины M_T. Если α есть аксиома теории T, то машина M_T' остановится через конечное число шагов, имея в начальный момент на ленте

+ Эти ответы суть довод в пользу того, что не даром едят хлеб занимающиеся проблемой разрешения для элементарных теорий.

формулу α . Если же α не есть аксиома теории T , то машина M'_T будет работать вечно. Можно несколько изменить машину Ганфа M с тем, чтобы она могла использовать в качестве сменной приставки машины M'_T . Для этого введем следующую функцию $f_T(n,\alpha)$: если машина M'_T , имея в начальный момент на ленте формулу α , остановится не более чем через n шагов, то $f_T(n,\alpha) = 1$, в противном случае $f_T(n,\alpha) = 0$. Пусть Γ есть натуральная [2] и рекурсивная нумерация всех формул из L . Пусть α_0 есть общезначимая формула из L и Δ есть натуральная и рекурсивная нумерация всех формальных доказательств формулы $\neg\alpha_0$. Пусть, наконец, E есть натуральная и рекурсивная нумерация всех пар (n,α) . Заменим блок-схему машины M из [1] блок-схемой, изображенной на рис. 1.

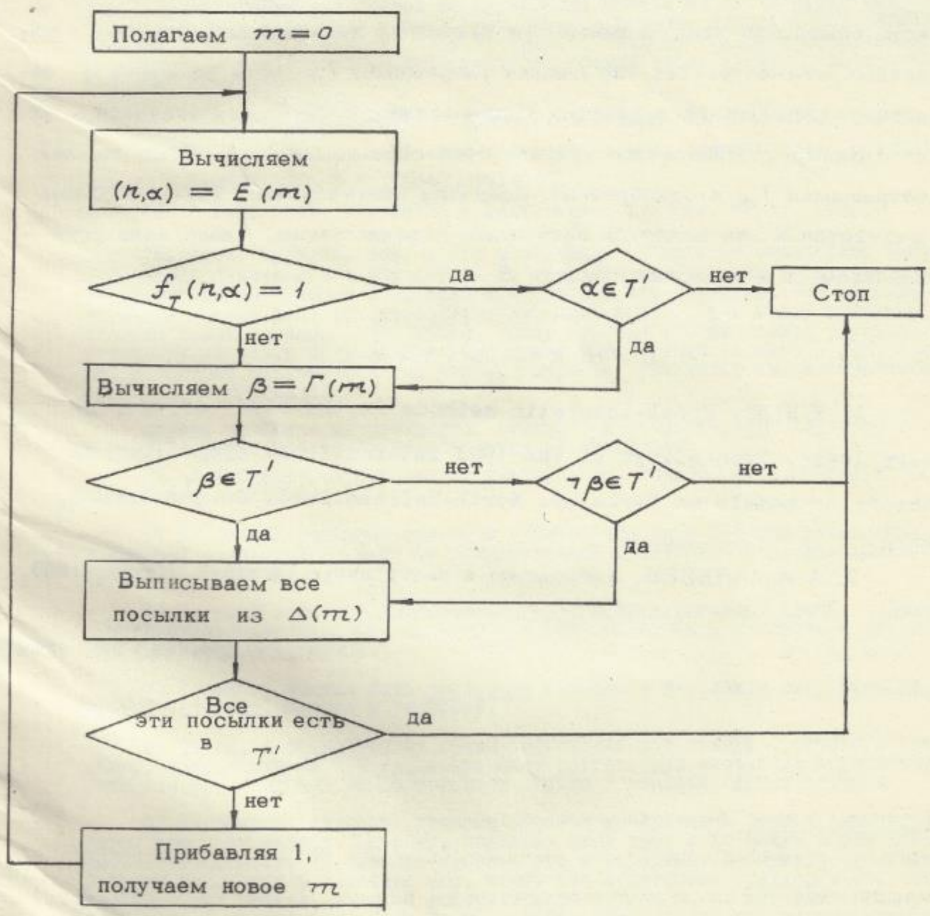

Рис. 1.

Здесь T' имеет тот же смысл, что и в [1]. В результате мы получим новую машину Ганфа M'. Пусть $F'(T)$ есть конечно аксиоматизируемая теория, описывающая работу машины M' с приставкой M'_T аналогично тому, как теория $F(T)$ описывает работу машины M с приставкой M_T. Нетрудно видеть, что по-прежнему $F'(T)$ разрешима в том и только том случае, когда T разрешима.

3. Пусть π_n есть n-е в нумерации Поста [2] рекурсивно перечислимое множество натуральных чисел. Обозначим посредством T_n теорию в языке L, множество аксиом которой есть $\{\Gamma(m): m\in\pi_n\}$. Положим $X = \{n : T_n$ разрешима$\}$. Предположим, что множество S из п.1 перечислимо. В силу п.2 при этом и множество X перечислимо. Согласно стр. 166 книги [2] при этом семейство $\{\pi_n : n\in X\}$ есть семейство всех надмножеств некоторой перечислимой системы конечных множеств. Так что каждая разрешимая T_n есть расширение некоторой разрешимой и конечно аксиоматизируемой T_m. Последняя же необходимо противоречива (учтите богатство языка L). Итак, каждая разрешимая T_n противоречива. Получили противоречие. Таким образом, множество S не является рекурсивно перечислимым. Аналогично устанавливается и неперечислимость $\bar{S}$.

Литература

1. W.HANF, Model-theoretic methods in the study of elementary logic, Proceedings of the 1963 international symposium on theory of models at Berkeley, North-Holland Publ. Co.,Amsterdam, 1965.

2. А.И.МАЛЬЦЕВ, Алгоритмы и рекурсивные функции, Наука, 1965.

Поступило 11. УП. 1969