НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИЙ КЛАССОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Гуревич Ю.Ш. (Свердловск)

Рассматриваются вопросы, близкие интересам автора и не вошедшие в обзор Ю.Л.Ершова, И.А.Лаврова, А.Д.Тайманова и М.А.Тайцлина (см. [I]).

§ I. Проблема разрешения для УИП.

Пусть Π - некоторая совокупность слов алфавита $\{\forall, \exists\}$, а σ - некоторая совокупность символов предикатов (сигнатура). Через $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ обозначим класс всех предваренных (пренексных) формул УИП с символом равенства, без свободных переменных, с приставками из Π и нелогическими константами из σ. Через $\Phi(\Pi,\sigma)$ обозначим соответствующий класс формул чистого УИП (т.е. УИП без символа равенства).

Класс формул Φ будем (в этом параграфе) называть разрешимым, если существуют алгоритмы распознавания выполнимости и конечной выполнимости формул из Φ. Класс формул будем называть классом сведения, если существует алгоритм, который произвольной формуле УИП с равенством α ставит в соответствие такую формулу β из нашего класса, что α и β одновременно выполнимы или невыполнимы и одновременно выполнимы или невыполнимы на конечных моделях.

Из известной теоремы Б.А.Трахтенброта о рекурсивной неотделимости тождественно-истинных и конечно-опровержимых формул УИП следует, что если Φ есть класс сведения, то всякая совокупность формул, содержащая все конечно-выполнимые формулы из Φ и содержащаяся сама в совокупности всех выполнимых формул из Φ, будет нерекурсивной.

Теорема I. Класс $\Phi(\Pi, \sigma)$ либо разрешим, либо является классом сведения. То же относится и к классу $\Phi^*(\Pi, \sigma)$.

Теорема 2. Класс $\Phi(\Pi, \sigma)$ разрешим в тех и только тех случаях, когда класс $\Phi^*(\Pi, \sigma)$ разрешим.

Теорема 3. Пусть

$$\Pi_1 = \{\exists^m \forall^n \mid m, n = 0, 1, \ldots\},$$
$$\Pi_2 = \{\exists^m \forall^i \exists^n \mid i = 0, 1, 2; \ m, n = 0, 1, \ldots\}$$

Класс $\Phi(\Pi, \sigma)$ разрешим в тех и только тех случаях, когда имеет место хотя бы одна из следующих трех возможностей:

I) сигнатура σ содержит лишь символы одноместных предикатов;

2) $\Pi \leqslant \Pi_1 \cup \Pi_2$;

3) множества σ и $\Pi \setminus (\Pi_1 \cup \Pi_2)$ конечны.

Замечание. В теореме 3 предполагается, что в σ нет нульместных предикатов (высказываний). Добавим теперь к σ сколько-нибудь нульместных предикатов. Если $\Phi(\Pi, \sigma)$ был классом сведения, то он им и останется; если класс $\Phi^*(\Pi, \sigma)$ был разрешим, то класс, который из него получится, тоже разрешим.

Далее рассматриваются нерешенные задачи.

§ 2. <u>К теории групп</u>

В этом параграфе слово "формула" обозначает формулу чистого узкого исчисления предикатов. Сигнатура групп состоит из одного 3-местного предиката $U(x, y, z)$, который читается так: z есть произведение x и y. Высказывание $\exists_z (U(z,z,z) \& U(z,x,y))$ записывается сокращенно через $x = y$. P означает в дальнейшем 2-местный предикат.

Под теорией S подразумевается пара вида $<\sigma : A>$, где σ - набор символов операций и предикатов (сигнатура), а A - набор σ-формул. $И(S)$ есть совокупность σ-формул, выводимых из A. Теории S и T называются равными, если $И(S) = И(T)$.

Пусть K - класс алгебраических систем сигнатуры σ. Через $И(K)$ (соответственно, $И_f(K)$) обозначим совокупность σ-формул, истинных на каждой (соответственно, на каждой конечной) системе из K. Теория класса K есть

$$Th(K) \rightleftharpoons <\sigma;\ И(K)>.$$

Пусть $П$ - набор слов алфавита $\{\forall, \exists\}$. Будем для краткости говорить, что K и $Th(K)$ удовлетворяют свойству $(П)$, если для всякого множества формул C из

$$\left(И(K) \cap \Phi(П,\sigma)\right) \subseteq C \subseteq \left(И_f(K) \cap \Phi(П,\sigma)\right)$$

следует нерекурсивность C. Будем считать, что $\forall^m \exists^\infty$ есть сокращение для $\{\forall^m \exists^n \mid n = 0, 1, \dots\}$.

Теорема 1. Теория 2-местного предиката $<P; \varnothing>$ удовлетворяет свойству $(\forall^3 \exists^\infty)$.

Теорема 2. Теория рефлексивного симметричного предиката $<P; P_{xx}, P_{xy} > P_{yx}>$ удовлетворяет свойству $(\forall^6 \exists^\infty)$.

Теорема 3. Пусть T_p - класс метабелевых p-групп (p - простое число) с тождеством $x^{p^2} = 1$ в случае $p \neq 2$ и $x^8 = 1$ в случае $p = 2$. Класс T_p удовлетворяет свойству $(\forall^{12}\exists^{\infty})$.

Далее рассматриваются следствия из теоремы 3 и некоторые известные результаты, дается историческая справка и обзор нерешенных вопросов.

§ 3. Проблема равенства слов

Рассматриваются универсальная теория и проблема равенства слов.

Приводятся некоторые классы полугрупп и колец, для которых проблема равенства слов является неразрешимой.

Литература

I. Ю.Л.Ершов, И.А.Лавров, А.Д.Тайманов, М.А.Тайманов, Элементарные теории, УМН, 1965, т. 20, вып. 4, 37-108.