А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
СЕМИНАР

Том 6
Выпуск 1 РУКОВОДИТЕЛЬ А.И.МАЛЬЦЕВ 1967 г.

НАСЛЕДСТВЕННАЯ НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО КЛАССА СТРУКТУРНО УПОРЯДОЧЕННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Ю.Ш.ГУРЕВИЧ

§ 1. Формулировка основного результата

Пусть $\mathcal{L}$ – класс структурно упорядоченных абелевых групп (с.у.а. групп) G, удовлетворяющих следующим требованиям:

1. G допускает доопределение умножения на действительные числа, превращающее её в К-линеал (см. [1]; в частности, G –делимая);

2. G – архимедова;

3. Структура $\hat{G}$ нитей с.у.а. группы G (см. [2]) – атомная;

4. $\hat{G}$ – булева алгебра.

ТЕОРЕМА 1. (Элементарная) т е о р и я к л а с с а $\mathcal{L}$ н а с л е д с т в е н н о н е р а з р е ш и м а.

§ 2. План доказательства теоремы 1

1. Известно [3], что теория иррефлексивного симметричного предиката неразрешима. Неразрешима также теория класса моделей иррефлексивного симметричного предиката вида $\langle\omega; P\rangle$, где ω - множество натуральных чисел.

2. В § 4 определяются такие формульные в языке с. у. групп предикаты θxy и $\bar{P}xy$, что для всякой с.у.а. группы G имеет место следующее:

2.1. отношение $\bar{P}$ иррефлексивно и симметрично;

2.2. на подмодели $G_\theta = \{x \in G : \theta xx\}$ отношение θ есть эквиваленция, стабильная относительно $\bar{P}$.

Таким образом, $\bar{P}$ индуцирует в G_θ/θ иррефлексивное симметричное отношение P. Модель $\langle G_\theta/\theta; P\rangle$ обозначаем G^*.

3. В § 5 по произвольной модели $\mathfrak{M} = \langle\omega; P\rangle$ иррефлексивного симметричного предиката строится с.у.а. группа $G(\mathfrak{M})$. В § 6 доказывается, что $G(\mathfrak{M})^* \cong \mathfrak{M}$. Легко видеть, что отсюда вытекает наследственная неразрешимость класса M всевозможных $G(\mathfrak{M})$. В § 7 доказывается, что $G(\mathfrak{M})$ удовлетворяет требованиям 1, 3, 4 из § 1.

4. В § 8 по $G(\mathfrak{M})$ строится новая с.у.а. группа $H(\mathfrak{M})$. В § 9 определяются формульные в языке с.у. групп предикаты $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Там же доказывается, что $\{x \in H(\mathfrak{M}) : \varphi(x)\}$ есть ℓ-идеал, а в фактор-группе по этому идеалу $\psi(x)$ вырезает ℓ-идеал, изоморфный $G(\mathfrak{M})$. В § 10 доказывается, что каждая $H(\mathfrak{M}) \in L$. Этим теорема 1 доказана. В самом деле, пусть $L \subseteq L_1$ и теория L_1 разрешима. Тогда разрешима теория L_2 -класса таких с.у.а. групп H из L_1, что

$$H_\varphi = \{x \in H : \varphi(x)\}$$

есть ℓ -идеал. Тогда разрешима теория класса L_3 с. у. а. групп вида H/H_φ, где $H \in L_2$. В этом случае разрешима теория класса L_4 таких с.у.а. групп G, что для некоторой $G' \in L_3$ с.у.а. группа G есть ℓ -идеал для G', состоящий в точности из тех элементов, которые удовлетворяют $\psi(x)$. Очевидно, $M \subseteq L_4$. Мы получили противоречие с наследственной неразрешимостью класса M.

§ 3. Терминология и обозначения

1. Мы используем терминологию и обозначения из [2]. Но групповую операцию называем сложением.

2. С.у. группы рассматриваем как алгебры сигнатуры $\{+, \vee, \wedge\}$. Элемент 0, операции $-x$ и $|x|$ и отношение $x \leq y$, очевидно, формульны. $x \perp y \overset{df}{\longleftrightarrow} |x| \wedge |y| = 0.$

$$\hat{x} \overset{df}{=} \{y : \forall z (x \perp z \longleftrightarrow y \perp z)\}.$$

$$\hat{x} \leq \hat{y} \overset{df}{\longleftrightarrow} \forall z (y \perp z \longrightarrow x \perp z).$$

Множества $\hat{x}$ называются нитями. Все эти определения взяты из [2]. Напомним ещё, что $(\widehat{x \wedge y}) = \hat{x} \wedge \hat{y}$, $(\widehat{x \vee y}) = \hat{x} \vee \hat{y}$ и $x, y \geq 0 \longrightarrow (\widehat{x+y}) = \hat{x} \vee \hat{y}$.

Нити с.у.а. группы G образуют структуру, которую будем обозначать, как уже отмечалось, $\hat{G}$.

3.1. $G+H$ есть прямая сумма с.у.а. групп G и H.

3.2. $\sum\limits_{i \in J} G_i$ есть дискретная прямая сумма с.у.а. групп G_i.

3.3. $\hat{\sum\limits_{i \in J}} G_i$ есть полная прямая сумма с.у.а. групп G_i.

3.4. Если G - с.у.а. группа и H - линейно упорядоченная абелева группа, то $G \vdash H$ есть лексикографическая сумма G и H (и сама с.у.а. группа). Если $g \in G$, $h \in H$, $h > 0$, то $g < h$ в $G \vdash H$. (Символ " $\vdash$ " используется в работе в двух смыслах: в только что определенном и в смысле истинности в модели).

Напомним, что операция "$\vdash$" ассоциативна.

4.2. Пусть G_0 - с.у.а. группа и при каждом i, $0 < i < \omega$, G_i есть л.у.а. группа (линейно упорядоченная абелева группа).

$$\underset{i\in\omega}{L} G_i \overset{df}{=} G_0 \vdash G_1 \vdash G_2 \vdash \dots .$$

5. R есть л.у. аддитивная группа всех действительных чисел.

6. Пусть x - элемент с.у.а. группы G и $x \geqslant 0$. В частности, x может быть действительным числом, т.е. элементом R. Как обычно,

$$sg(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0; \\ 0, \text{ если } x = 0; \end{cases}$$

$$\overline{sg}(x) = 1 - sg(x).$$

7. Пусть A, B - с.у.а. группы, $G = A + B$ и $g \in G$. $\text{пр}_A\, g$ есть такой $a \in A$, что $g - a \in B$.

§ 4. Определение G^*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $Lx \overset{df}{\leftrightarrow} x > 0.\ \forall y(\hat{y} < \hat{x} \rightarrow y < x)$.

ЛЕММА 1. $Lx.Ly \rightarrow [(\hat{x} \leqslant \hat{y}) \vee (\hat{y} \leqslant \hat{x}) \vee (x \perp y)]$.

ПОЯСНЕНИЕ. Лемма 1 утверждает, что выписанная формула принадлежит теории с.у.а. групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Предположим Lx, Ly, $\neg(\hat{x} \leqslant \hat{y})$, $\neg(\hat{y} \leqslant \hat{x})$. Тогда

$$2(x \hat{\wedge} y) = (x \hat{\wedge} y) = \hat{x} \wedge \hat{y} < \hat{x}.$$

Отсюда $2(x \wedge y) < x$; аналогично $2(x \wedge y) < y$, то есть $0 \leqslant 2(x \wedge y) \leqslant x \wedge y$, откуда $x \wedge y = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

$$\theta xy \overset{df}{\leftrightarrow} x > 0.\ y > 0.\ \exists w(Lw.\ \hat{x} \leqslant \hat{w}.\ \hat{y} \leqslant \hat{w}).$$

ЛЕММА 2. $\theta xy . \theta yz \to \theta xz$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть θxy и θyz. Зафиксируем такие u и v, что $Lu . \hat{x} \leqslant \hat{u} . \hat{y} \leqslant \hat{u}$ и $Lv . \hat{y} \leqslant \hat{v} . \hat{z} \leqslant \hat{v}$. Так как $0 \neq y \leqslant u \wedge v$, то в силу леммы 1 либо $\hat{u} \leqslant \hat{v}$, либо $\hat{v} \leqslant \hat{u}$. Положим $w = u \vee v$. Тогда Lw и $\hat{x} \leqslant \hat{w}$ и $\hat{z} \leqslant \hat{w}$, то есть θxz.

СЛЕДСТВИЕ. θ есть отношение эквивалентности на $\{x : \theta xx\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.

$$\bar{P}xy \overset{df}{\longleftrightarrow} \theta xx . \theta yy . \neg \theta xy .$$

$$\cdot \exists z \forall uv \, [z > 0 . (\theta uu . \neg \theta ux . \neg \theta uy \to z \perp u) .$$

$$\cdot (\theta xu . \theta yv \to (z \neq u + v) \cdot (z \neq u) \cdot (z \neq v)) \,] .$$

ЛЕММА 3.

$$\neg \bar{P}xx . (\bar{P}xy \to \bar{P}yx) . (\bar{P}xy . \theta xx' \to \bar{P}x'y) .$$

Доказательство очевидно.

Наконец, в соответствии с § 2 дадим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть G – с.у.а. группа. Совокупность классов эквивалентности $\{x \in G : \theta xx\} / \theta$ с отношением P, индуцированным отношением $\bar{P}$ из G, есть модель иррефлексивного симметричного предиката, которую мы будем обозначать G^*.

§ 5. Построение $G(\mathfrak{M})$

1. Фиксируем некоторую модель $\mathfrak{M} = \langle \omega ; P \rangle$ иррефлексивного симметричного предиката.

2. $Re(\xi, i, j)$ есть с.у.а. группа формальных действительных кратных символа $e(\xi, i, j)$; $\xi, i, j \in \omega$.

3. $L(\xi, i) \overset{df}{=} \underset{j \in \omega}{L} Re(\xi, i, j)$.

4. $\tilde{A}(\xi) \overset{df}{=} \tilde{\sum\limits_{i\in\omega}} L(\xi,i)$, $\tilde{A} \overset{df}{=} \tilde{\sum\limits_{\xi\in\omega}} \tilde{A}(\xi)$.

5. При $1 \leqslant K \leqslant \omega$.

5.1. $f(\xi,K) \overset{df}{=} \sum\limits_{i\leqslant K} e(\xi,i,K) \in \tilde{A}(\xi)$.

5.2. $B(\xi,1) \overset{df}{=} Re(\xi,0,0)+Re(\xi,1,0) \subset \tilde{A}(\xi)$.

5.3. $B'(\xi,K)$ есть ℓ -подгруппа из $\tilde{A}(\xi)$, порожденная ℓ -подгруппами $B(\xi,K)$ и $Rf(\xi,K)$.

5.4. $B(\xi,K+1)$ есть ℓ -подгруппа $\tilde{A}(\xi)$, порожденная ℓ -подгруппами $B'(\xi,K)$ и $Re(\xi,K+1)$.

5.5. В $\tilde{A}$ можно естественным образом ввести умножение на действительные числа. Это умножение мы будем подразумевать в дальнейшем. Rx при $x\in\tilde{A}$ есть ℓ -подгруппа $\tilde{A}$, состоящая из действительных кратных элемента x.

5.6. Вместо "$e(\xi,i,0)$" будем в дальнейшем часто писать "$e(\xi,i)$".

5.7. Легко видеть, что

5.7.1. $B'(\xi,K)=B(\xi,K) \vdash Rf(\xi,K)$.

5.7.2. $B(\xi,K+1)=B'(\xi,K)+Re(\xi,K+1)$.

5.8. $B(\xi) \overset{df}{=} \bigcup\limits_{K\in\omega} B(\xi,K) \subset \tilde{A}(\xi)$.

5.9. $B \overset{df}{=} \sum\limits_{\xi\in\omega} B(\xi) \subset \tilde{A}$.

6.1. $g(\xi,\eta) \overset{df}{=} \sum\limits_{K\in\omega} e(\xi,p_\eta^{K+1}) + \sum\limits_{K\in\omega} e(\eta,p_\xi^{K+1})$,

где p_i есть i -тое в порядке возрастания простое число.

6.2. $h \overset{df}{=} \sum\limits_{\xi,i\in\omega} e(\xi,i)$.

6.3. $G(\mathfrak{M})$ есть, по определению, ℓ -подгруппа $\tilde{A}$, порожденная ℓ -подгруппами B, $Rg(\xi,\eta)$ при $\mathfrak{M} \vdash P\xi\eta$ и Rh.

§ 6 . $G(\mathfrak{M})^* \cong \mathfrak{M}$

ЛЕММА 4. Всякий $g \in G(\mathfrak{M})$ представим в виде:

$$g = b + \sum \lambda(\xi,\eta) g(\xi,\eta) + \mu h, \qquad (1)$$

где $b \in B$, $[\lambda(\xi,\eta) \neq 0 \to (\xi<\eta) \cdot (\mathfrak{M} \vdash P\xi\eta)]$ и лишь конечное число $\lambda(\xi,\eta) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Докажем сначала, что в $\widetilde{A}$ имеет место следующая формула:

$$\left.\begin{aligned}&(\sum \lambda'(\xi,\eta) g(\xi,\eta) + \mu' h) \vee (\sum \lambda''(\xi,\eta) g(\xi,\eta) + \mu'' h) = \\ &= \sum [(\lambda'(\xi,\eta)+\mu'-m) \vee (\lambda''(\xi,\eta)+\mu''-m)] g(\xi,\eta) + mh\end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

где $m = \mu' \vee \mu''$. Предполагается $\lambda'(\xi,\eta) = \lambda''(\xi,\eta) = 0$ при $\xi \geq \eta$

Достаточно доказать, что при каждых $\alpha, i \in \omega$ левая и правая части формулы (2) имеют одинаковые проекции в $L(\alpha,i)$.

1 случай. i не имеет вида p_β^{k+1}. Тогда

$$\text{пр}_{L(\alpha,i)}(\sum \lambda(\xi,\eta) g(\xi,\eta) + \mu h) = \mu e(\alpha,i).$$

И формула (2) очевидна.

2 случай. $i = p_\beta^{k+1}$. Предположим для определенности $\alpha < \beta$. При $\lambda(\beta,\alpha) = 0$ имеем

$$\text{пр}_{L(\alpha,i)}(\sum \lambda(\xi,\eta) g(\xi,\eta) + \mu h) = (\lambda(\alpha,\beta)+\mu) e(\alpha,i).$$

Спроектируем левую и правую части формулы (2) на $L(\alpha,i)$. ($e(\alpha,i)$ мы опускаем и вместо $\lambda'(\alpha,\beta)$ и $\lambda''(\alpha,\beta)$ пишем λ' и λ'', соответственно). Проекция левой части =

$$= (\lambda'+\mu') \vee (\lambda''+\mu'') =$$

$$= (\lambda'+\mu'-m+m) \vee (\lambda''+\mu''-m+m) =$$

$=\left[(\lambda'+\mu'-m)\vee(\lambda''+\mu''-m)\right]+m$ = проекция правой части.

Формула (2) доказана.

2. $G(m)$ строится из элементов $b\in B$, $\lambda g(\xi,\eta)$ при подходящих $g(\xi,\eta)$ и μh при помощи операций: $+$, $-$, $\vee$, $\wedge$. Операции $+$ и $-$, очевидно, сохраняют вид (1), а $x\wedge y=((-x)\vee(-y))$. Поэтому для доказательства леммы 4 достаточно доказать, что если g' и g'' имеют вид (1), то и $g'\vee g''$ имеет вид (1).

Пусть $$g'=b'+\sum\lambda'(\xi,\eta)g(\xi,\eta)+\mu'h=b'+g_0',$$

$$g''=b''+\sum\lambda''(\xi,\eta)g(\xi,\eta)+\mu''h=b''+g_0''.$$

Очевидно, найдется такое конечное множество $X\subset\omega$ и такое $k(\alpha)\in\omega$, что $\text{пр}_{L(\alpha,i)}(|b'|+|b''|)\neq 0\rightarrow(\alpha\in X).(i\leqslant k(\alpha))$. Ясно, что проекции на $L(\alpha,i)$ элементов $g'\vee g''$ и $g_0'\vee g_0''$ могут быть не равны лишь при $\alpha\in X$ и $i\leqslant k(\alpha)$, т. е. для некоторого $b\in B$ имеем: $g'\vee g''=b+(g_0'\vee g_0'')$. Применение формулы (2) заканчивает доказательство леммы 4.

ЛЕММА 5. Пусть $g\in G(m)$ и $G(m)\vdash Lg$. Тогда g лежит в некоторой $B(\xi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся представлением (1) для g.

1. Покажем, что $\mu=0$. Доказательство от противного. Пусть $\mu\neq 0$. Возьмем i достаточно большим, так чтобы $\text{пр}\, L(0,i)\,b=0$, и не имеющим вида $i=p_\xi^{k+1}$. Обозначим $g(i)=|\text{пр}\, L(0,i)\,g|$. Тогда $2\widehat{g(i)}=\hat{g}(i)<\hat{g}$, но $\neg(2g(i)<g)$. Получили противоречие с $G(m)\vdash Lg$. Следовательно, $\mu=0$.

2. Покажем, что $\lambda(\xi,\eta)=0$. Доказательство от противного. Пусть $\lambda(\xi,\eta)\neq 0$. Найдется такое k, что если $i=p_\eta^{k+1}$, то $\text{пр}_{L(\xi,i)}b=0$.

Обозначим

$$g(i) = |\text{пр}\, L(\xi, i) g| .$$

Тогда $2g(i) = \hat{g}(i) < \hat{g}$, но $\neg(2g(i) < g)$.

Противоречие.

3. Итак, $g = b \in B$. Положим $g = \sum b(\xi)$, где $b(\xi) \in B(\xi)$. Так как $G(\mathfrak{M}) \vdash Lg$, то $g > 0$ и потому некоторый $b(\xi) > 0$. Пусть $\xi \neq \eta$. Покажем, что $b(\eta) = 0$. Этим лемма 5 будет доказана. Доказательство от противного. Пусть и $b(\eta) > 0$. Тогда $2\hat{b}(\eta) = \hat{b}(\eta) < \hat{g}$, но $\neg(2b(\eta) < g)$.

Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $x, y \in G(\mathfrak{M})$. $G(\mathfrak{M}) \vdash \theta xy$ равносильно тому, что x и y (строго) положительны и лежат в одной и той же $B(\xi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Пусть θxy. Тогда $x, y > 0$ и найдется такой w, что Lw и $\hat{x} < \hat{w}$ и $\hat{y} < \hat{w}$. Но по лемме 6 элемент w лежит в некоторой $B(\xi)$. Тогда и x, и y лежат в той же $B(\xi)$.

2. Пусть $x, y \in B$ и $x, y > 0$. Фиксируем такое k, что $x, y \in B(\xi, k)$. Возьмем теперь $w = f(\xi, k)$. Очевидно, имеет место Lw и $\hat{x} < \hat{w}$, и $\hat{y} < \hat{w}$.

Лемма 6 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Элементами множества $\{x \in G(\mathfrak{M}) : \theta xx\} / \theta$ являются все множества $\{x : x \in B(\xi) . x > 0\}$ и только они.

ЛЕММА 7. (Вместо "$e(\alpha, 0)$" пишем "e_α").

$$(G(\mathfrak{M}) \vdash \bar{P} e_\xi e_\eta) \leftrightarrow (\mathfrak{M} \vdash P \xi \eta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Подставим в определение 3 из § 4 вместо x и y элементы e_ξ и e_η, соответственно. Заключаем, что $\bar{P} e_\xi e_\eta$ будет тогда и только тогда, когда $\xi \neq \eta$ и найдется такой z, что $z > 0$

и в $\tilde{A}$ имеет место следующее: $z \in \tilde{A}(\xi)+\tilde{A}(\eta)$
и $z \bar{\in} B(\xi)+B(\eta)$.

2. Пусть $\mathfrak{M} \vdash P_{\xi\eta}$. Роль z из определения 3 может играть элемент $g(\xi,\eta)$.

3. Пусть $G(\mathfrak{M}) \vdash \bar{P} e_\xi e_\eta$ и z – соответствующий e_ξ и e_η в силу определения 3 элемент. Представим z в виде (1) :

$$z=b+\sum \lambda(\alpha,\beta)g(\alpha,\beta)+\mu h.$$

Условие $z \in \tilde{A}(\xi)+\tilde{A}(\eta)$ показывает, что на самом деле z имеет вид: $z=b(\xi)+b(\eta)+\lambda(\xi,\eta)g(\xi,\eta)$.
(Будем считать, для определенности, что $\xi<\eta$).

Условие $z \bar{\in} B(\xi)+B(\eta)$ показывает, что $\lambda(\xi,\eta)\neq 0$. Это означает согласно лемме 4, что $\mathfrak{M} \vdash P_{\xi\eta}$.

Лемма 7 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. $G(\mathfrak{M})^* \cong \mathfrak{M}$.

§ 7. Свойства $G(\mathfrak{M})$

Очевидно, $\hat{G}(\mathfrak{M})$ – атомная.

Представление (1) из леммы 4 показывает, что $G(\mathfrak{M})$ удовлетворяет свойству 1 из § 1.

ЛЕММА 8. $\hat{G}(\mathfrak{M})$ – булева алгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Структура нитей всякой с.у.а. группы дистрибутивна (см. [2]). Нам нужно для всякого $x \in G(\mathfrak{M})$ найти такой $x^* \in G(\mathfrak{M})$, что $\hat{x} \vee \hat{x}^*$ есть единица $\hat{G}(\mathfrak{M})$, а $\hat{x} \wedge \hat{x}^* = \hat{0}$, т.е. $x \perp x^*$. Можно считать $x \geqslant 0$. x^* тоже будем искать большим или равным нулю. Заметим, что если элементу $x \in G(\mathfrak{M})$ поставить в соответствие совокупность тех пар (ξ,i), что проекция x на $L(\xi,i)$ отлична от нуля, то мы получим изоморфное вложение $\hat{G}(\mathfrak{M})$ в структуру подмножеств пар множества всех пар (ξ,i).

1 случай. $x=\sum \lambda(\xi,\eta)g(\xi,\eta)$.
Тогда $$x^*=h-\sum sg(\lambda(\xi,\eta))g(\xi,\eta).$$

2 случай. $x=\sum \lambda(\xi,\eta)g(\xi,\eta)+\mu h$ и $\mu\neq 0$.

Тогда $x^*=\sum \bar{s}\bar{g}(\mu+\lambda(\xi,\eta))g(\xi,\eta)$.

3 случай. $x\in B$. Тогда $x=h-\sum e(\xi,i)$, где сумма распространяется на такие $e(\xi,i)$, что $\hat{e}(\xi,i)\leqslant\hat{x}$.

4 случай (общий). $x=b+\sum\lambda(\xi,\eta)g(\xi,\eta)+\mu h=b+x_o$.

Пусть X есть совокупность всех таких пар (ξ,i), что

$$0\neq \text{пр}_{L(\xi,i)}b=-\text{пр}_{L(\xi,i)}x_o.$$

Тогда $x^*=(|b^*|\wedge x_o^*)+\sum\limits_{(\xi,i)\in X}e(\xi,i)$.

Лемма 8 доказана.

§ 8. Построение $H(\mathfrak{M})$

1. $R_S(\xi,i)$ есть л.у.а. группа формальных действительных кратных символа $S(\xi,i)$; $\xi,i\in\omega$.

2.1. $$C(\xi)\overset{df}{=}\sum_{i\in\omega}R_S(\xi,i).$$

2.2. $$\tilde{C}(\xi)\overset{df}{=}\tilde{\sum_{i\in\omega}}R_S(\xi,i).$$

2.3. $$C\overset{df}{=}\tilde{\sum_{\xi\in\omega}}C(\xi).$$

2.4. $$\tilde{C}\overset{df}{=}\tilde{\sum_{\xi\in\omega}}\tilde{C}(\xi).$$

3.1. $$t(\xi,k)\overset{df}{=}\sum_{i\in\omega}i^k s(\xi,i).$$

3.2. $$h_o\overset{df}{=}\sum_{\xi,i\in\omega}2^i s(\xi,i).$$

4.1. $\mathcal{D}(\xi)$ есть, по определению, ℓ-подгруппа из $\tilde{C}(\xi)$, порожденная ℓ-подгруппами $C(\xi)$ и $Rt(\xi,t)$ при $0\leqslant k<\omega$. (Относительно $Rt(\xi,k)$ см. п. 5.5 из § 5. Роль $\tilde{A}$ здесь играет $\tilde{C}$).

4.2. $$\mathcal{D}'\overset{df}{=}\tilde{\sum_{\xi\in\omega}}\mathcal{D}(\xi).$$

4.3. $\mathcal{D}$ есть, по определению, ℓ -подгруппа из $\tilde{C}$, порожденная ℓ -подгруппами $\mathcal{D}'$ и Rh_0 .

5.1. ЛЕММА 9. Всякий $x \in \mathcal{D}(\xi)$ представим в виде

$$x = c + \sum \lambda(k) t(\xi, k), \tag{3}$$

где $c \in C(\xi)$ и лишь конечное число $\lambda(k) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в лемме 4, достаточно проверить, что если x' и x'' имеют вид (3), то и $x' \vee x''$ имеет вид (3).

Пусть $$x' = c' + \sum \lambda'(k) t(\xi, k) = c' + x'_0.$$

$$x'' = c'' + \sum \lambda''(k) t(\xi, k) = c'' + x''_0.$$

1 случай. Для всех $k \in \omega$ имеет место $\lambda'(k) = \lambda''(k)$. Тогда $x' \vee x'' = (c' + x'_0) \vee (c'' + x'_0) = (c' \vee c'') + x'_0$.

2 случай. Существует такое k , что $\lambda'(k) \neq \lambda''(k)$. Положим $k_0 = max\{k : \lambda'(k) \neq \lambda''(k)\}$. Пусть для определенности $\lambda'(k_0) < \lambda''(k_0)$. Легко видеть, что в этом случае найдется такое i_0 , что при $i > i_0$

$$\text{пр}_{R_{S(\xi,i)}} x' < \text{пр}_{R_{S(\xi,i)}} x''.$$

Таким образом, $x' \vee x''$ отличается от x'' на элемент из

$$\sum_{i \leq i_0} R_{S(\xi,i)} \subset C(\xi).$$

Лемма 9 доказана.

5.2. СЛЕДСТВИЕ. Всякий $x \in \mathcal{D}'$ представим в виде

$$x = c + \sum \lambda(\xi, i) t(\xi, i), \tag{4}$$

где $c \in C$ и при каждом ξ лишь конечное число $\lambda(\xi, k) \neq 0$.

5.3. ЛЕММА 10. Всякий $x \in \mathcal{D}$ представим в виде

$$x=d+\mu h_o, \tag{5}$$

где $d\in\mathcal{D}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. И в этом случае достаточно показать, что если $x'=d'+\mu' h_o$, $x''=d''+\mu'' h_o$ и $d', d''\in\mathcal{D}'$, то и $x'\vee x''$ имеет вид (5).

1 случай. $\mu'=\mu''$. Тогда

$$x'\vee x''=(d'\vee d'')+\mu' h_o.$$

2 случай. $\mu'\neq\mu''$. Пусть для определенности $\mu'<\mu''$. Легко видеть, что при каждом ξ найдется такое $\alpha(\xi)\in\omega$, что при $i>\alpha(\xi)$ имеет место:

$$\text{пр}_{RS(\xi,i)}x' < \text{пр}_{RS(\xi,i)}x'',$$

т. е. $x'\vee x''$ отличается от x'' на элемент из

$$\tilde{\sum_{\xi\in\omega}}\sum_{i\leq\alpha(\xi)} RS(\xi,i)\subset\mathcal{D}'.$$

Лемма доказана.

5.4. СЛЕДСТВИЕ. Всякий $x\in\mathcal{D}$ представим и единственным образом в виде

$$x=c+\sum\lambda(\xi,i)t(\xi,i)+\mu h_o, \tag{6}$$

где $c\in C$ и при каждом ξ лишь конечное число $\lambda(\xi,i)\neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование представления (6) следует из 5.1. – 5.3. Единственность очевидна.

6.1. ЛЕММА 11. $\mathcal{D}/C=\left[\left(\tilde{\sum_{\xi\in\omega}} \underset{i\in\omega}{L} R(t,\xi,i)+C)\right)\vdash R(h_o+C)\right]$.

Следует из 5.4.

6.2. Очевидно, $\tilde{A}$ из § 5 изоморфна

$$\sum_{\xi\in\omega}\underset{i\in\omega}{L} R(t(\xi,i)+C).$$

Зафиксируем некоторый подходящий изоморфизм χ. χ переводит $G(\mathfrak{M})$ в некоторую $\chi(G(\mathfrak{M}))\subset\mathcal{D}/C$.

6.3. $H(\mathfrak{M})$ есть, по определению, полный прообраз $\mathcal{C}$ - подгруппы $\chi(G(\mathfrak{M}))\vdash R(h_0+C)$ при естественном гомоморфизме $\mathcal{D}\to\mathcal{D}/C$.

§ 9. $\varphi(x)$, $\psi(x)$

1.1. $$\varphi_1(x)\overset{df}{\leftrightarrow}\forall y\exists z(\hat{z}\leqslant\hat{x}.\ x\perp y-z).$$

1.2. $$\varphi(x)\overset{df}{\leftrightarrow}\forall y(\hat{y}\leqslant\hat{x}\to\varphi_1(y)).$$

1.3. СЛЕДСТВИЕ. $\hat{y}<\hat{x}\cdot\varphi(x)\to\varphi(y)$.

1.4. СЛЕДСТВИЕ. $\varphi(x)\to\varphi(|x|)$

1.5. $$\check{x}\overset{df}{=}\{y:\hat{y}\leqslant\hat{x}\}.$$

2. ЛЕММА 12. Пусть X - с.у.а. група и. $x\in X$. $X\vdash\varphi_1(x)$ равносильно тому, что $\check{x}$ выделяется в X прямым слагаемым.

Доказательство очевидно.

СЛЕДСТВИЕ. $X\vdash\varphi(x)$ равносильно тому, что всякий $\check{z}$, лежащий в $\check{x}$, выделяется в X прямым слагаемым.

3. ЛЕММА 13. Пусть X - с. у. а. группа; $x_1,x_2\in X$; $x_1,x_2\geqslant 0$; $X\vdash(\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2))$. Тогда

$$X\vdash\varphi(x_1+x_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$X=\check{x}_1+X_1=\check{x}_2+X_2,$$

и каждый $\check{z}$ из $\check{x}_1$ и из $\check{x}_2$ выделяется в X прямым слагаемым. Представим x_2 в виде $x_2=y_1+y_2$, где $y_1\in\check{x}_1$, а $y_2\perp x_1$. Тогда

$$X=(\check{x}_1+\check{y}_2)+(X_1\cap X_2)=(x_1+x_2)^{\vee}+(X_1\cap X_2).$$

Нужно доказать, что каждый ℓ -идеал $\check{z} \subseteq (x_1 \check{+} x_2)$ выделяется в X прямым слагаемым. Представим z в виде $z = z_1 + z_2$, где $z_1 \in \check{x}_1$, а $z_2 \in \check{y}_2 \subseteq \check{x}_2$. Тогда $z_1 \perp z_2$, $\check{z}_1$ и $\check{z}_2$ выделяются в X прямыми слагаемыми. Тогда и $\check{z} = \check{z}_1 + \check{z}_2$ выделяется в X прямым слагаемым.

Лемма 13 доказана.

4. ЛЕММА 14. $H(\mathfrak{M}) \vdash (x \in C \rightarrow \varphi(x))$.

Доказательство очевидно.

5. ЛЕММА 15. $H(\mathfrak{M}) \vdash (\neg \varphi_1(t(\xi, 0)))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве y из п. 1.1 выберем h_0 и предположим, что нашелся такой z, что $\hat{z} \leqslant \hat{t}(\xi, 0)$ и $t(\xi, 0) \perp (h_0 - z)$. Представим z в виде (6):

$$z = c + \sum \lambda(\eta, i) t(\eta, i) + \mu h_0 .$$

Так как $z \in \check{t}(\xi, 0) = \tilde{C}(\xi)$, то $\mu = 0$. Поэтому

$$h_0 - z = -c - \sum \lambda(\eta, i) t(\eta, i) + h_0$$

и при достаточно большом i проекция $h_0 - z$ на $RS(\xi, i)$ отлична от нуля, то есть $\neg(t(\xi, 0) \perp (h_0 - z))$. Получили противоречие с тем, что $\varphi_1(t(\xi, 0))$.

Лемма 15 доказана.

6. ЛЕММА 16. Пусть $x \in H(\mathfrak{M})$ и $H(\mathfrak{M}) \vdash \varphi(x)$. Тогда $x \in C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно ограничиться случаем $x \geqslant 0$. Представим x в виде (6):

$$x = c + \sum \lambda(\xi, i) t(\xi, i) + \mu h_0$$

и предположим, что $x \bar{\in} C$. Тогда найдутся такие ξ и i_0, что при $i > i_0$ имеет место: пр$_{RS(\xi, i)} x \neq 0$. Положим

$$c_0 = \sum_{i \leqslant i_0} S(\xi, i).$$

По лемме 14 $\varphi(c_0)$. По лемме 13 из $\varphi(c_0)$ и из $\varphi(x)$ следует $\varphi(c_0 + x)$. Но $\hat{t}(\xi, 0) \leqslant (c_0 \hat{+} x)$. Отсюда

$\varphi_1(t(\xi,0))$. Получили противоречие.

Лемма 16 доказана.

7. СЛЕДСТВИЕ. $\{x\in H(\mathfrak{M}) : \varphi(x)\} = C$.

8. Согласно п. 6.3 из § 8 $H(\mathfrak{M})/C \cong G(\mathfrak{M}) \vdash R$. Очевидно, формула $\psi(S) \overset{df}{\longleftrightarrow} \neg\psi_1(x)$, где

$$\psi_1(x) \overset{df}{\longleftrightarrow} \forall y\,[\hat{y}\leq\hat{x}\,.\,(\hat{y}<\hat{x}\to y<|x|)],$$

вырезает в $H(\mathfrak{M})/C$ ℓ-идеал, изоморфный $G(\mathfrak{M})$.

§ 10. $H(\mathfrak{M})\in L$

1. Так как $C\subset H(\mathfrak{M})\subset\tilde{C}$, то $H(\mathfrak{M})$ - архимедова и $\hat{H}(\mathfrak{M})$ - атомная.

2. Всякий $x\in\mathcal{D}$, согласно п.5 из § 8, можно представить в виде (6): $x = c+\sum\lambda(\xi,i)t(\xi,i)+\mu h_0$. При этом $x\in H(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда

$$\sum\lambda(\xi,i)(t(\xi,i)+C)\in\mathcal{X}(G(\mathfrak{M})).$$

Но, согласно § 7, $G(\mathfrak{M})$ содержит все действительные кратные своих элементов. Нетрудно видеть, что и $H(\mathfrak{M})$ содержит все действительные кратные своих элементов.

3. ЛЕММА 17. $\hat{H}(\mathfrak{M})$ - булева алгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$x = c+\sum\lambda(\xi,i)t(\xi,i)+\mu h_0\in H(\mathfrak{M}).$$

Если $\mu\neq 0$, то уже в C можно найти такой y, что $\hat{y}$ есть дополнение $\hat{x}$ в $\hat{H}(\mathfrak{M})$. Пусть $\mu=0$. Согласно § 7 $\hat{G}(\mathfrak{M})$ - булева алгебра. Пусть y - такой элемент $H(\mathfrak{M})$, что $(y\hat{+}C)$ есть дополнение $(x\hat{+}C)$ в структуре нитей с.у.а. группы $\mathcal{X}(G(\mathfrak{M}))$. Представим и y в виде (4):

$$y = c'+\sum\lambda'(\xi,i)t(\xi,i).$$

Ясно, что

$$\sum_i |\lambda(\xi,i)|=0 \leftrightarrow \sum_i |\lambda'(\xi,i)|\neq 0.$$

Определим теперь $c_\xi \in C(\xi)$.

1 случай. $\sum_i |\lambda(\xi,i)| \neq 0$. Найдется такое i_0 , что для каждого $i > i_0$ проекция x на $RS(\xi,i)$ отлична от нуля. Положим

$$c_\xi = \sum_{i \leq i_0} \overline{sg} \mid \text{пр}\ R_{S(\xi,i)} x \mid \cdot S(\xi,i).$$

2 случай. $\sum_i |\lambda(\xi,i)| = 0$. Найдется такое i_0 , что для каждого $i > i_0$ проекция x на $RS(\xi,i)$ равна нулю, а проекция y на $RS(\xi,i)$ отлична от нуля. Положим

$$c_\xi = -\sum_{i \leq i_0} sg \mid \text{пр}_{RS(\xi,i)} x \mid \cdot \ \text{пр}_{RS(\xi,i)} |y|.$$

Положим теперь

$$z = |y| + \sum_{\xi \in \omega} c_\xi .$$

Нетрудно видеть, что $\hat{z}$ является дополнением $\hat{x}$ в $\hat{H}(m)$.

Лемма 17 доказана. Согласно § 2 доказана и теорема 1.

Поступила в редакцию
15. XI. 1966 г.

Литература

1. Б.З.Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., 1961.

2. Л.Фукс. Частично упорядоченные алгебраические системы, М., 1965.

3. Ю.Л.Ершов, И.А.Лавров, А.Д.Тайманов, М.А.Тайцлин. Элементарные теории. - УМН, 1965, т.20, вып. 4, стр. 37-108.

THE HEREDITARILY UNDECIDABILITY OF ONE CLASS OF LATTICE-ORDERED ABELIAN GROUPS

Yu.Š. Gurevich (Sverdlovsk)

(Summary)

Let G be an Abelian ℓ-group. We denote through G the lattice of all $\hat{g}$ with $g \in G$ (see [2]). Let L be the class of all such Abelian ℓ-group G so that G is divisible and Archimedean and $\hat{G}$ is atomic Boolean algebra.

THEOREM 1. (Elementary) theory of L is hereditarily undecidable.