ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1966

том 166, № 5

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 166, № 5

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

Ю. Ш. ГУРЕВИЧ

К ПРОБЛЕМЕ РАЗРЕШЕНИЯ ДЛЯ ЧИСТОГО УЗКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

(Представлено академиком А. И. Мальцевым 26 V 1965)

1. В (1) приведена сводка результатов по сведению проблемы разрешения для выполнимости для чистого узкого исчисления предикатов. При этом указывается, что если исключить классы формул вида

$\exists^a\forall\exists^b\forall\exists^n M(F_1, \ldots, F_c)$ $\cancel{\exists^a\forall^b\exists^n M(F_1, \ldots, F_c)}$,

содержащих не только одноместные предикаты, где a, b, c ограничены в данном классе и $b > 0$, то для любого из оставшихся классов пренексных формул без свободных переменных и с фиксированным набором предикатов задача решена.

Теорема. *Пусть σ содержит один двуместный и $(9 + k)$ одноместных предикатов, где $2^k \geqslant m^*$ и m^* есть число состояний универсальной машины Тьюринга. Множества опровержимых и конечно выполнимых σ-формул вида $\forall\exists\forall \& \exists^n$ рекурсивно неотделимы.*

Настоящая статья посвящена доказательству этой теоремы.

2. Под машиной Тьюринга здесь понимается вариант таких машин, описанный в (2). M^* обозначает далее универсальную машину Тьюринга. Пусть X_1 (соответственно X_2) — множество таких n, что M^* сходит с ленты (соответственно зацикливается), если при начальной ситуации $\overbrace{11\ldots1}^{n+1}00\ldots$ M^* рассматривает самую левую ячейку. X_1 и X_2 рекурсивно неотделимы.

3. В (2) для каждой машины Тьюринга M строится такая формула $\alpha_M(x, x', y)$, содержащая двуместные предикаты S, K и H и некоторое число одноместных, что M, рассматривая в нулевой момент нулевую ячейку пустой ленты, когда-нибудь сходит с ленты (соответственно зацикливается) в том и только том случае, если $\forall xy\alpha_M(x, x + 1, y)$. $Z0$ невыполнима (соответственно выполнима периодическими предикатами) в области натуральных чисел. При этом Zy интерпретируется так: y есть нуль, а Syx — так: в момент y ячейка номера x непуста. В α_{M^*} заменим $(Zy \supset \neg Syx')$ на $(Zy \supset (Syx' \supset Syx))$. Получим формулу $\alpha(x, x', y)$.

Лемма 1. *$n \overline{\in} X_1$ (соответственно $n \in X_2$) в том и только том случае, когда $\forall xy\alpha(x, x + 1, y)$. $Z0$. $So n$. $\neg So(n + 1)$ выполнима (соответственно выполнима периодическими предикатами) в области натуральных чисел.*

4. Пусть $\beta(x, x', y)$ есть конъюнкция следующих пяти формул:

4,1. $\neg Ax \,.\, \neg Ay \,.\, Cxy \supset Dx'y$.

4,2. $Dyx \supset \neg Ax' \,.\, Cyx'$.

4,3. $Ay \,.\, Cyx \supset Ax'$.

4,4. $Ax \,.\, Bx \,.\, Zy \supset Syx \,.\, \neg Syx'$.

4,5. $Bx \supset Bx'$.

Пусть

$$\varphi_n = \forall x\exists x'\forall y\,(\alpha(x, x', y).\beta(x, x', y))\,\& \\ \&\exists x_0x_1\ldots x_n\,[Ax_0 \,.\, \bigwedge_{i>0} \neg Ax_i \,.\, \bigwedge_{i<n} Cx_ix_{i+1} \,.\\ .\bigwedge_{i+1\neq j} \neg Cx_ix_j \,.\, Zx_n \,.\, Bx_n].$$

Лемма 2. $\varphi = [\forall xy\alpha(x, x+1, y).\ Z0.\ So n.\ \neg So(n+1)]$ *выполнима (соответственно выполнима периодическими предикатами) в области натуральных чисел тогда и только тогда, когда* φ_n *выполнима (соответственно конечно выполнима).*

Покажем, как устроена модель для φ_n, если существует подходящая модель $\mathfrak{N}$ для φ. Пусть $|\mathfrak{M}_i| = \{(i, k) | k = 0, 1, \ldots\}$ и $(i, k) \leftrightarrow k$ есть изоморфизм $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{N}$, $i = 0, \ldots, n$.

При $i \neq j$ полагаем $\neg S(i, k)(j, l)$, $\neg K(i, k)(j, l)$, $\neg H(i, k)(j, l)$. Полагаем, далее:

$A(i, k)$ равносильно $i = k$,
$B(i, k)$ равносильно $i = n$,
$C(i, k)(j, l)$ равносильно $j = i + 1$ и $k = l \leqslant i$,
$D(i, k)(j, l)$ равносильно $j = i + 1$ и $k = l + 1 \leqslant i$.

Пары (i, k) с определенными отношениями и образуют модель для φ_n.

Если теперь имеется модель $\mathfrak{M}$ для φ_n, то, не нарушая общности, можно считать, что $|\mathfrak{M}|$ состоит из пар (i, k), где $i = 0, \ldots, n$ и $k = 0, 1, \ldots$ Элемент $(i, 0)$ играет роль x_i из φ_n. Индукцией по i доказывается $A(i, i)$. Из $A(n, n)$ и $B(n, 0)$ при помощи 4,5 и 4,4 выводится $S(n, 0)(n, n)$ и $\neg S(n, 0)(n, n+1)$. Элементы (n, k), $k = 0, 1, \ldots$, с соответствующими отношениями образуют подходящую модель для φ.

5. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель для φ_n. Заменим каждый элемент a из $\mathfrak{M}$ одиннадцатью новыми элементами $a^0, \ldots, a^{10}$. Пусть h — какой-нибудь одноместный предикат из φ_n; если имело место ha (соответственно $\neg ha$), полагаем ha^i (соответственно $\neg ha^i$), $i = 0, \ldots, 10$. Определим теперь на множестве $\{a^i | a \in \mathfrak{M}, i = 0, \ldots, 10\}$ новый предикат Fxy (или просто xy):

5,1. $Cab \to \bigwedge\limits_i (a^i b^0 . b^i a^2) . b^1 a^{10}$.

5,2. $Dab \to \bigwedge\limits_i (a^i b^1 . b^i a^3)$.

5,3; 5,4; 5,5 — аналогично 5,1 и 5,2, но для S, K и H соответственно.

5,6. $a^i b^j$ имеет место лишь в том случае, если это следует из 5,1—5,5.

В результате мы получим модель для определяемой ниже формулы ψ_n.

6. Пусть $\gamma(x, x', y)$ есть конъюнкция следующих формул:

6,1. $\bigvee\limits_{i=0}^{10} f^i x . \bigwedge\limits_{i \neq j} \neg (f^i x . f^j x)$.

6,2. $\bigwedge\limits_{i<10} (f^i x \sim f^{i+1} x')$.

6,3. $\bigwedge\limits_{h,\, i<10} f^i x \supset (hx \sim hx')$ (здесь h пробегает одноместные предикаты из φ_n).

6,4. $\bigwedge\limits_{i<10} [f^i x . (f^0 y \vee f^2 y) \supset (xy \sim x'y)] . [f^{10} y . f^0 x \supset (yx \sim x'y)]$.

6,5—6,8. Формулы, относящиеся к D, S, K и H так же, как 6,4 относится к C.

6,9. $f^{10} x . f^1 y . \neg Ax . \neg Ay . yx \subset x'y$.

6,10 и далее — формулы, относящиеся к 4,2, …, 4,5 и конъюнктам из $\alpha(x, x', y)$ так же, как 6,9 относится к 4,1.

Пусть

$$\psi_n = \forall x \exists x' \forall y\ \gamma(x, x', y)\ \&$$
$$\& \exists x_0 x_1 \ldots x_n [\bigwedge\limits_i f^0 x_i . Ax_0 . \bigwedge\limits_{i>0} \neg Ax_i .$$
$$. \bigwedge\limits_{i<n} x_i x_{i+1} . \bigwedge\limits_{1+i \neq j} \neg x_i x_j . Zx_n . Bx_n].$$

Лемма 3. φ_n *выполнима (соответственно конечно выполнима) тогда и только тогда, когда выполнима (соответственно конечно выполнима)* ψ_n.