АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

АЛГЕБРА И ЛОГИКА

СЕМИНАР

ТОМ 3
ВЫПУСК 1

НОВОСИБИРСК
1964

Зоечке милой с радостью
и без надежды.
Юрий

А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

Том III
Выпуск I Руководитель А.И.Мальцев 1964 г

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА УПОРЯДОЧЕННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Ю.Ш.Гуревич

В работе устанавливается классификация упорядоченных абелевых групп по элементарным свойствам.

Доказывается, что элементарная теория упорядоченных абелевых групп разрешима в том и только том случае, если разрешима элементарная теория упорядоченных множеств. Отсюда, если учесть анонсированную в [1] теорему о разрешимости элементарной теории упорядоченных множеств, следует разрешимость элементарной теории упорядоченных абелевых групп.

§ I. Некоторые обозначения и определения

I.I. Пусть σ -сигнатура; $\Phi(\sigma)$ - множество, не содержащих свободных переменных формул УИП сигнатуры σ; $\Phi_n(\sigma)$ - множество формул из $\Phi(\sigma)$, имеющих в пренексной форме не более n кванторов. Если $\mathfrak{M}$ - модель σ, то $\Phi(\mathfrak{M})$ есть множество формул из $\Phi(\sigma)$, истинных на $\mathfrak{M}$. По определению $\Phi_n(\mathfrak{M}) = \Phi(\mathfrak{M}) \cap \Phi_n(\sigma)$. Если $\mathcal{K}$ - класс моделей σ, то $\Phi(\mathcal{K}) \overset{df}{=} \bigcap_{\mathfrak{M} \in \mathcal{K}} \Phi(\mathfrak{M})$. $\Phi(\mathcal{K})$ называется элементарной теорией класса.

I.2. Предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ называется формульным в классе $\mathcal{K}$ моделей сигнатуры σ, если существует такая формула $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ УИП сигнатуры σ, что во всех моделях класса $\mathcal{K}$ $P(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathfrak{A}(x_1, \ldots x_n)$. В случае $n=0$ получаем определение формульного высказывания.

Пусть $\tau = (Q, R, \ldots)$ есть множество формульных в классе $\mathcal{K}$ моделей сигнатуры σ предикатов. И пусть $\mathfrak{M} \in \mathcal{K}$.

$|\mathfrak{M}|$ обозначает множество элементов модели $\mathfrak{M}$. Так как предикаты $Q, R, \ldots$ формульны, то их значения в $|\mathfrak{M}|$ определены. Через $<|\mathfrak{M}|, \tau> = <|\mathfrak{M}|, Q, R, \ldots>$ будем обозначать соответствующую модель сигнатуры τ. В частности, $\mathfrak{M} = <|\mathfrak{M}|, \sigma>$. Пусть, кроме того, P - унарный формульный в классе $\mathcal{K}$ предикат. $<|\mathfrak{M}|, \tau>^P$ есть, по определению, подмодель $<|\mathfrak{M}|, \tau>$, содержащая те и только те элементы $|\mathfrak{M}|$, которые удовлетворяют P.

I.3. Следующие выражения мы будем употреблять как синонимы:

I. Элементарная теория класса $\mathcal{K}$ разрешима.

2. $\Phi(\mathcal{K})$ разрешима.

3. $\mathcal{K}$ - разрешимый класс.

I.4. p_i обозначает в порядке возрастания i - ое простое число.

Пусть s - положительное целое число, $\ell(s)$ есть номер наибольшего простого числа, делящего s, $(s)_i$ есть показатель наибольшей степени числа p_i, делящей s, $\pi(s)$ есть множество простых делителей числа s.

I.5. Вместо "выигрышная стратегия", "упорядоченное множество", "упорядоченная абелева группа" будем коротко писать в.с., у.м., у.а.г., соответственно.

I.6. Упорядоченность везде будет обозначать линейную упорядоченность.

§ 2. $\Gamma_n(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$

Ниже излагаются, следуя [2], условия для равенства $\Phi_n(\mathfrak{M}_1) = \Phi_n(\mathfrak{M}_2)$. Аналогичные условия на языке отображений были независимо получены А.Д.Таймановым [3].

Пусть $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ - модели σ. $\Gamma_n(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ есть игра, в которую играют два игрока: $\underline{I}$ и $\underline{II}$. Игроки по очереди делают ходы. Начинает $\underline{I}$. На k -ом $(k = 1, \ldots n)$ ходу он выбирает сначала число ℓ_k, равное I или 2. Затем в модели $\mathfrak{M}_{\ell_k}$ он выбирает элемент $a_k^{\ell_k}$. $\underline{II}$ на k-ом ходу в $\mathfrak{M}_{3-\ell_k}$ выбирает элемент $a_k^{3-\ell_k}$. После n ходов получается соответствие:

$$\begin{matrix} a_1^1 \longleftarrow a_1^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_n^1 \longleftarrow a_n^2 \end{matrix} \qquad (*)$$

Если $(*)$ есть изоморфизм, то выиграл $\underline{II}$. В противном случае выиграл $\underline{I}$.

ЛЕММА I. Если $\mathbb{II}$ имеет в $\Gamma_n(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ в. с., то $\Phi_n(\mathfrak{M}_1) = \Phi_n(\mathfrak{M}_2)$.

Пусть теперь σ конечна и $t = t(\sigma)$ есть такое положительное целое число, что $(t)_i$ есть число i - арных предикатов σ.

ЛЕММА 2. Существует такая примитивно рекурсивная функция $N = N(t(\sigma), n)$, что если $\Phi_{N(t(\sigma),n)}(\mathfrak{M}_1) = \Phi_{N(t(\sigma),n)}(\mathfrak{M}_2)$, то $\mathbb{II}$ имеет в. с. в $\Gamma_n(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$.

Мы будем использовать также игру $\Gamma_{(n_1,\dots,n_e)}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$, которая отличается от $\Gamma_e(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ лишь тем, что на k -ом ходу игроки выбирают по n_k элементов, но не обязательно по одному. Очевидна

ЛЕММА 3. Пусть $n = n_1 + \dots + n_e$. Если $\mathbb{II}$ имеет в. с. в $\Gamma_n(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$, то он имеет в. с. и в $\Gamma_{(n_1,\dots n_e)}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$.

§ 3. m - цепи

3.I. Пусть m - положительное целое число, или ω, а τ_m - сигнатура, содержащая бинарный предикат $x < y$ и унарные предикаты $|x| = k$, $1 \leq k < m$.

$x \leq y$ есть сокращение $\neg(y < x)$,

$x \asymp y$ есть сокращение $\neg(x < y) \,\&\, \neg(y < x)$,

$|x| \neq k$ есть сокращение $\neg(|x| = k)$.

В случае $x < y$ мы будем говорить, что x предшествует y. В случае $|x| = k$ мы будем говорить, что норма x равна k.

T_m есть класс моделей сигнатуры τ_m, удовлетворяющих следующим аксиомам (кванторы всеобщности, предшествующие всем другим формальным символам, здесь и далее в подобных случаях опускаются):

(3.I.I) $x \asymp x$.

(3.I.2) $x \asymp y \rightarrow y \asymp x$.

(3.I.3) $x \asymp y \,\&\, y \asymp z \rightarrow x \asymp z$.

(3.I.4) $x_1 \asymp x_2 \,\&\, y_1 \asymp y_2 \,\&\, x_1 < y_1 \rightarrow x_2 < y_2$.

(3.I.5) $x \asymp y \,\&\, |x| = k \rightarrow |y| = k$, $1 \leq k < m$.

(3.2.I) $x < y \rightarrow \neg(y < x)$.

(3.2.2) $x<y \,\&\, y<z \longrightarrow x<z$.

(3.3.I) $|x|=i \longrightarrow |x|\neq j,\ i\neq j,\ 1\leq i,j<m$.

Модели класса T_m будем называть m -цепями. Таким образом, если не различать элементы, связанные знаком $\asymp$, то m -цепь есть у.м., элементы которого могут не иметь никакой нормы и могут иметь одну единственную норму; нормами служат положительные целые числа, меньшие m; никакой связи между порядком и нормами не предполагается. T_1 есть просто класс у.м.

Легко видеть, что

$$\Phi(T_m)=\Phi(T_\omega)\cap\Phi(\tau_m).$$

Мы будем употреблять для сокращения записи также предикат $|x|=0$. $|x|=0$ будет означать, что элемент x не имеет никакой (положительной) нормы. В случае конечного m $|x|=0$ есть сокращение $|x|\neq 1 \,\&\, \ldots \,\&\, |x|\neq(m-1)$. Предикат $|x|=0$ не входит ни в τ_m, ни в формулы из $\Phi(T_m)$.

3.2. ЛЕММА 4. Если
I. $\mathcal{K}$ - разрешимый класс моделей сигнатуры σ;
2. $\tau=(Q_1,Q_2,\ldots)$ - множество формульных в $\mathcal{K}$ предикатов, $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\ldots$ - соответствующие формулы УИП сигнатуры σ;
3. P - унарный формульный в $\mathcal{K}$ предикат;
4. L - такой класс моделей сигнатуры τ, что: а) для всякой $\mathfrak{M}\in\mathcal{K}$ $\langle|\mathfrak{M}|,\tau\rangle^P\in L$ и б) для всякой $\mathfrak{N}\in L$ найдется такая $\mathfrak{M}\in\mathcal{K}$, что $\langle|\mathfrak{M}|,\tau\rangle^P\cong\mathfrak{N}$, то $\Phi(L)$ разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{A}\in\Phi(\tau)$. Заменим в $\mathfrak{A}$ предикаты Q_i формулами $\mathfrak{A}_i$ и ограничим кванторы предикатом P. Получим формулу $\mathfrak{B}\in\Phi(\sigma)$. Ясно, что $\mathfrak{A}\in\Phi(L)$ равносильно $\mathfrak{B}\in\Phi(\mathcal{K})$.

3.3. ЛЕММА 5. Элементарная теория ω-цепей разрешима, если разрешима элементарная теория у.м.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S(x,y)$ есть сокращение $\neg\exists z(x<z<y) \,\&\, x<y$.

Положим

$$|x| = k \overset{df}{\equiv} \exists x_1 \ldots \exists x_k \, \forall y \, [S(x, x_1) \,\&\, S(x_1, x_2) \,\&\, \ldots \,\&$$
$$\& \, S(x_{k-1}, x_k) \,\&\, \neg S(x_k, y)], \quad 1 \leqslant k < \omega;$$
$$P(x) \overset{df}{\equiv} \neg \exists y \, S(y, x).$$

Воспользуемся леммой 4 с T_1, τ_1, T_ω, τ_ω в качестве K, σ, L, τ, соответственно. Очевидно, что если $\mathfrak{M} \in T_1$, то $\langle |\mathfrak{M}|, \tau_\omega \rangle^P$ действительно ω-цепь. Пусть теперь $\mathfrak{N}$ – ω-цепь. Элементу $x \in \mathfrak{N}$ с нормой k $(k = 0, 1, \ldots)$ поставим в соответствие множество A_x, упорядоченное по типу $1 + k + \omega^* + \omega$. Предполагаем, что $A_x = A_y$ при $x \asymp y$ и $A_x \cap A_y = \varnothing$ – в противном случае. Продолжим частичный порядок в $\bigcup A_x$ до линейного, полагая при $x < y$ каждый элемент из A_x предшествующим каждому элементу из A_y. Получим у.м., которое будем называть ассоциированным с $\mathfrak{N}$. Это у.м., очевидно, искомое.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть m конечно. Класс моделей τ_m, удовлетворяющих лишь аксиомам (3.I.I)–(3.2.2) разрешим, если разрешим класс у.м.

3.4. Пусть $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ – ω-цепи, а $\mathfrak{M}', \mathfrak{N}'$ – ассоциированные с ними у.м.

ЛЕММА 6. Для $\Phi(\mathfrak{M}) = \Phi(\mathfrak{N})$ необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(\mathfrak{M}') = \Phi(\mathfrak{N}')$.

Необходимость следует из того, что в.с. $\underline{II}$ в $\Gamma_n(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}')$ легко строится по в.с. $\underline{II}$ в $\Gamma_n(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

Достаточность. Пусть $\Phi(\mathfrak{M}') = \Phi(\mathfrak{N}')$. Тогда $\Phi(\langle |\mathfrak{M}'|, \tau_\omega \rangle^P) = \Phi(\langle |\mathfrak{N}'|, \tau_\omega \rangle^P)$. Но $\langle |\mathfrak{M}'|, \tau_\omega \rangle^P \cong \mathfrak{M}$, $\langle |\mathfrak{N}'|, \tau_\omega \rangle^P \cong \mathfrak{N}$.

§ 4. Линейный порядок в прямых суммах циклических групп

4.I. Через σ_0 будем обозначать сигнатуру, содержащую один тернарный предикат $S(x, y, z)$. Вместо $S(x, y, z)$ будем часто писать $x + y = z$.

$x = 0$ есть сокращение $\forall y \, S(x, y, y)$.

$x = y$ есть сокращение $\forall z \, (z = 0 \rightarrow S(z, x, y))$.

$S(x, y, 0)$ есть сокращение $\forall z \, (z = 0 \rightarrow S(x, y, z))$.

$\mathcal{K}^0$ есть класс моделей сигнатуры σ_0, удовлетворяющих аксиомам:

(4.I.I) $x=x$.

(4.I.2) $x=y \to y=x$.

(4.I.3) $x=y \,\&\, y=z \to x=z$.

(4.I.4) $x_1=x_2 \,\&\, y_1=y_2 \,\&\, z_1=z_2 \,\&\, S(x_1,y_1,z_1) \to S(x_2,y_2,z_2)$.

(4.2.I) $\exists z S(x,y,z)$.

(4.2.2) $S(x,y,z_1) \,\&\, S(x,y,z_2) \to z_1=z_2$.

(4.2.3) $S(x,y,u) \,\&\, S(u,z,w_1) \,\&\, S(y,z,v) \,\&\, S(x,v,w_2) \to w_1=w_2$.

(4.2.4) $S(x,y,z) \to S(y,x,z)$.

(4.2.5) $\exists x\,(x=0)$.

(4.2.6) $\exists x\, S(x,y,0)$.

Таким образом, если не различать элементы, связанные знаком $=$, модель класса $\mathcal{K}^0$ есть абелева группа.

4.2. Пусть $\mathcal{K}_{ij}$ есть класс абелевых групп, содержащий прямые суммы циклических групп порядка p_i^j и нулевую группу.

ЛЕММА 7. Каждый ненулевой элемент g из $G\in\mathcal{K}_{ij}$ лежит в циклическом прямом слагаемом.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $G\in\mathcal{K}_{ij}, g\in G$ и $0\le k\le j$

$$p_i^k g=0 \to p_i^{j-k} \mid g.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Соответствие :

$$g^\nu \to h^\nu, \tag{I}$$

где $g^\nu\in G,\ h^\nu\in H,\ \nu=1,\ldots,k$; $G,H\in\mathcal{K}_{ij}$, называется правильным соответствием (элементов групп $G,H\in\mathcal{K}_{ij}$), если найдутся такие элементы $g_1,\ldots,g_r\in G$ и $h_1,\ldots h_r\in H$ и такие целые числа ξ_μ^ν, что $\{g_1\}+\ldots+\{g_r\}$ есть прямое слагаемое G, $\{h_1\}+\ldots+\{h_r\}$ есть прямое слагаемое H и $g^\nu=\sum\xi_\mu^\nu g_\mu$, $h^\nu=\sum\xi_\mu^\nu h_\mu$.

Здесь $\{g\}$ обозначает циклическую подгруппу, порожденную элементом g, а знак $+$ есть знак прямой суммы.

Наименьшее из возможных r называется рангом правильного соответствия (I).

Пусть $\alpha(G)$, где $G\in\mathcal{K}_{ij}$, есть число циклических прямых слагаемых в некотором разложении G.
Тогда $\alpha_n(G)\overset{df}{=}\min(\alpha(G),n)$.

ЛЕММА 8. Пусть (I) – правильное соответствие ранга $r<n$ и $\alpha_n(G)=\alpha_n(H)$. Тогда для всякого $g\in G$ найдется такой $h\in H$, что продолжение (I) при помощи g—h есть правильное соответствие ранга $\leqslant r+1$.

4.3. Пусть $\mathcal{K}_s$, где s – положительное целое число, есть класс абелевых групп, удовлетворяющих аксиоме $\forall x(sx=0)$.

По первой теореме Прюфера [4] группа $G\in\mathcal{K}_s$ может быть представлена в виде прямой суммы $G=\sum G_{ij}$, где $G_{ij}\in\mathcal{K}_{ij}$; $G_i \overset{df}{=} \sum_j G_{ij}$ – силовская.

Через g_i будем обозначать компоненту элемента $g\in G$ в G_i.

Замечание. Существует такое число ζ_i, зависящее лишь от s и i, что $g_i=\zeta_i g$. Зафиксируем для последующих ссылок для каждых s и i некоторое определенное ζ_i

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Соответствие:

$$g^\nu — h^\nu, \tag{2}$$

где $g^\nu\in G$, $h^\nu\in H$, $\nu=1,\dots k$; $G,H\in\mathcal{K}_s$, называется правильным соответствием (элементов групп $G,H\in\mathcal{K}_s$), если существуют такие прямые разложения $G=\sum G_{ij}$, $H=\sum H_{ij}$, где $G_{ij},H_{ij}\in\mathcal{K}_{ij}$, что соответствие:

$$g^\nu_{ij} — h^\nu_{ij} , \tag{2_{ij}}$$

где g^ν_{ij}, h^ν_{ij} есть компоненты g^ν, h^ν в G_{ij}, H_{ij}, соответственно, $\nu=1,\dots,k$, есть правильное соответствие.

Максимальный среди рангов соответствий (2_{ij}) называется рангом соответствия (2).

Пусть $G\in\mathcal{K}_s$ и $G=\sum G_{ij}$, где $G_{ij}\in\mathcal{K}_{ij}$. Положим

$$\beta_n(G) \overset{df}{=} \sum \alpha_n(G_{ij})\cdot(n+1)^{(s)_1+\dots+(s)_{i-1}+j-1}.$$

ЛЕММА 9. Пусть (2) – правильное соответствие ранга $r<n$ и $\beta_n(G)=\beta_n(H)$. Тогда для всякого $g\in G$ найдется такой $h\in H$, что продолжение (2) при помощи g—h есть правильное соответствие ранга $\leqslant(r+1)$.

4.4. Пусть $\mathcal{K}_s^*$ есть класс абелевых групп, содержащий прямые суммы циклических групп порядков $p_1^{(s)_1},\dots,p_{e(s)}^{(s)_{e(s)}}$ и нулевую группу.

ЛЕММА I0. Пусть $G \in \mathcal{K}_s^*$, $g \in G$ и $m|s$. Тогда $mg=0 \longrightarrow \frac{s}{m}|g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится при помощи следствия леммы 7.

4.5. Пусть ρ_1 есть сигнатура, содержащая предикаты $S(x,y,z)$ и $x<y$.

L_s есть класс таких моделей $\mathfrak{M}$ сигнатуры ρ_1, что:

а) $<|\mathfrak{M}|, S(x,y,z)> \in \mathcal{K}_s^*$.

б) $\mathfrak{M}$ удовлетворяет аксиомам (3.I.I) - (3.I.4), (3.2.I), (3.2.2) (с теми же соглашениями относительно сокращений).

в) $\mathfrak{M}$ удовлетворяет аксиомам:

(4.3.I) $x \leq 0 \longrightarrow x=0$.

(4.3.2) $x+y \leq \max(x,y)$.

(4.3.3) $px<y \longrightarrow \exists z(pz=px \,\&\, z<y)$,

где $p \in \pi(s)$.

Без труда проверяются следующие простейшие свойства моделей класса L_s, где m - произвольное целое число, n - делитель s, $O(x)$ означает порядок элемента x в смысле теории групп.

1) $x=y \longrightarrow x \asymp y$.

2) $mx \leq x,\ x_i \leq x$.

3) $(m,s)=1 \longrightarrow mx \asymp x,\ (m,O(x))=1 \longrightarrow mx \asymp x,\ -x \asymp x$.

4) $x \neq y \longrightarrow x+y \asymp \max(x,y)$.

5) $x = \max\limits_i x_i$

6) $mx<y \longrightarrow \exists z(mz=mx \,\&\, z<y)$.

7) $D(x) \stackrel{df}{=} <\hat{y}(y<x),\ S(x,y,z)> \in \mathcal{K}_s^*$.

8) $\mathcal{E}(x) \stackrel{df}{=} <\hat{y}(y \leq x),\ S(x,y,z)> \in \mathcal{K}_s$.

9) $F(x) \stackrel{df}{=} \mathcal{E}(x)/D(x) \in \mathcal{K}_s$.

В пунктах 7) и 9) предполагается $x \neq 0$. Дополнительно положим $D(0)=\emptyset$, $F(0)=0$.

Пусть $G \in L_s$. Подгруппу A будем называть выпуклой, если

$$x,y \in A \,\&\, x<z<y \longrightarrow z \in A.$$

Пустое множество тоже будем считать выпуклой подгруппой.

Подгруппы $D(x)$ и $\mathcal{E}(x)$ выпуклы. $D(x)$ сервантна.

$\mathcal{E}(x) \setminus D(x)$ будем называть скачком G.

4.6. Пусть μ пробегает некоторое множество M натуральных чисел. И пусть $\mathcal{E}_\mu^1 \setminus D_\mu^1$ есть скачок $G \in L_s$, $\mathcal{E}_\mu^2 \setminus D_\mu^2$ есть скачок $H \in L_s$, $F_\mu^1 = \mathcal{E}_\mu^1 / D_\mu^1$, $F_\mu^2 = \mathcal{E}_\mu^2 / D_\mu^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Соответствие:

$$D_\mu^1 \longrightarrow D_\mu^2 \tag{3}$$

называется n - правильным соответствием, если:

1) $D_{\mu_1}^1 \subseteq D_{\mu_2}^1 \equiv D_{\mu_1}^2 \subseteq D_{\mu_2}^2$.

2) $\beta_n(F_\mu^1) = \beta_n(F_\mu^2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Соответствие:

$$g^\nu \longrightarrow h^\nu, \tag{4}$$

где $g^\nu \in G$, $h^\nu \in H$, $\nu = 1,\ldots,k$, $G, H \in L_s$, называется n - правильным соответствием, если:

1) $D(\Sigma \xi_\nu g^\nu) \longrightarrow D(\Sigma \xi_\nu h^\nu)$,

где $\xi_1,\ldots,\xi_k$ пробегают всевозможные целые числа, есть n - правильное соответствие.

2) Пусть $\Sigma \xi_\nu^1 g^\nu,\ldots,\Sigma \xi_\nu^\ell g^\nu$ - все элементы вида $\Sigma \xi_\nu g^\nu$, принадлежащие $\mathcal{E}(\Sigma \xi_\nu^1 g^\nu)$. Тогда $\Sigma \xi_\nu^1 h^\nu,\ldots,\Sigma \xi_\nu^\ell h^\nu$ - все элементы вида $\Sigma \xi_\nu h^\nu$, принадлежащие $\mathcal{E}(\Sigma \xi_\nu^1 h^\nu)$ и

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \xi_\nu^1 g^\nu + D(\Sigma \xi_\nu^1 g^\nu) \longrightarrow \Sigma \xi_\nu^1 h^\nu + D(\Sigma \xi_\nu^1 h^\nu) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma \xi_\nu^\ell g^\nu + D(\Sigma \xi_\nu^1 g^\nu) \longrightarrow \Sigma \xi_\nu^\ell g^\nu + D(\Sigma \xi_\nu^1 h^\nu) \end{array}\right\} \tag{4'}$$

есть правильное соответствие элементов групп

$$F(\Sigma \xi_\nu^1 g^\nu), F(\Sigma \xi_\nu^1 h^\nu) \in \mathcal{K}_s.$$

При этом (4') называется подсоответствием, относящимся к $D(\Sigma \xi_\nu^1 g^\nu)$.

Рангом соответствия (4) называется максимальный среди рангов подсоответствий.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть (4) - n-правильное соответствие и $m|s$. Тогда $m|\Sigma \xi_\nu g^\nu \longrightarrow m|\Sigma \xi_\nu h^\nu$.

В самом деле, пусть $m|\Sigma \xi_\nu g^\nu$. Тогда $\frac{s}{m}\Sigma \xi_\nu g^\nu = 0 \in E(\Sigma 0 \cdot g^\nu)$. Отсюда $\frac{s}{m} \cdot \Sigma \xi_\nu h^\nu = 0$, и в силу леммы 10 $m|\Sigma \xi_\nu h^\nu$.

4.7. ЛЕММА 11. Дано:

0) $G, H \in L_{p^s}$, где p - простое число; $\mathcal{E}^1 \setminus D^1$ и $\mathcal{E}^2 \setminus D^2$ - скачки G и H соответственно; $g^\nu \in G$, $h^\nu \in H$, $\nu = 1, \ldots, k$; $\tau < n$; $g \in G$.

I) Соответствие:

$$D(\Sigma \xi_\nu g^\nu) \longleftrightarrow D(\Sigma \xi_\nu h^\nu), \quad D^1 \longleftrightarrow D^2, \tag{5}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_k$ пробегают всевозможные целые числа, n - правильное соответствие.

2) Соответствие:

$$g^\nu \longleftrightarrow h^\nu \tag{6}$$

где $\nu = 1, \ldots, k$ - n-правильное соответствие; причем ранг τ может достигаться лишь в подсоответствиях, относящихся к тем $D(\Sigma \xi_\nu g^\nu)$, которые содержатся в D^1.

3) $p^j g$ - минимальный среди элементов вида $p^j g + \Sigma \xi_\nu g^\nu$ при $0 \leq j < \eta$ и $p^j g \in \mathcal{E}^1 \setminus D^1$.

4) $p^\eta g = \Sigma \xi_\nu^0 g^\nu \in D^1$.

Тогда найдется такой $h \in H$, что продолжение (6) при помощи $g \longleftrightarrow h$ есть n-правильное соответствие; причем, ранг τ не может достигаться в подсоответствиях, относящихся к тем $D(\Sigma \xi_\nu g^\nu)$, которые содержат D^1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия из второго определения из 4.6. найдется такой $a \in H$, что $p^\eta a = \Sigma \xi_\nu^0 h^\nu \in D^2$. Так как D^2 сервантна, то можно считать, что $a \in D^2$.

В силу леммы 9 найдется такой $b \in H$, что продолжение подсоответствия, относящегося к D^1 при помощи $g + D^1 \longleftrightarrow b + D^2$ есть правильное соответствие ранга $\leq \tau$. При этом $p^\eta b \in D^2$. Пусть $c \in D^2$ и $p^\eta c = p^\eta b$. Положим $h = b - c + a$. Элемент h - искомый.

ЛЕММА I2. Дано:

0) $G, H \in L_{p^s}$; $\mathcal{E}_\mu^1 \setminus D_\mu^1$ - скачок G, $\mathcal{E}_\mu^2 \setminus D_\mu^2$ - скачок H, $\mu = 1, \ldots, s$; $g^\nu \in G$, $h^\nu \in H$, $\nu = 1, \ldots, k$; $g \in G$.

1) **Соответствие:**

$$\begin{cases} D(\Sigma \xi_\nu g^\nu) \longrightarrow D(\Sigma \xi_\nu h^\nu), \\ D^1_\mu \longrightarrow D^2_\mu, \end{cases}$$

является n - правильным соответствием.

2) **Соответствие:**

$$g^\nu \longrightarrow h^\nu \qquad (7)$$

является n -правильным соответствием ранга $r<n$.

3) a_μ **-минимальный среди элементов вида** $p^{s-\mu}g+\Sigma \xi_\nu g^\nu$ **и** $a_\mu \in \mathcal{E}^1_\mu \setminus D^1_\mu$ **.**

Тогда найдется такой $h \in H$, что продолжение (7) при помощи $g \longrightarrow h$ является n -правильным соответствием ранга $\leq (r+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i<j$. Тогда $p^{j-i}a_j$ имеет вид $p^{s-i}_j g+\Sigma \xi_\nu g^\nu$, и потому $a_i \leq p^{j-i}a_j \leq a_j$. Пусть $p^j | g$ при $0 \leq j \leq \mu_0$. Тогда (считаем $g \neq 0$, то есть $\mu_0 < s$; случай $g=0$ тривиален):

$$0=a_{\mu_0} < a_{\mu_0+1} \asymp \ldots \asymp a_{\mu_1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{\mu_{k-1}} < a_{\mu_{k-1}+1} \asymp \ldots \asymp a_{\mu_k}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{\mu_{e-1}} < a_{\mu_{e-1}+1} \asymp \ldots \asymp a_{\mu_e} = a_s$$

Ясно,что,не нарушая условий леммы,мы можем (см. k -ую строку) заменить $a_{\mu_{k-1}}$ на $pa_{\mu_k}, \ldots, a_{\mu_{k-1}+1}$ на $p^{\mu_k-\mu_{k-1}-1}a_{\mu_k}$, $k=1,\ldots,e$.

Условия леммы II удовлетворяются с $D^1_{\mu_1}$, $D^2_{\mu_1}$, a_{μ_1} в качестве D^1 , D^2 , g . Поэтому найдется такой $b_1 \in H$, что продолжение (7) при помощи $a_{\mu_1} \longrightarrow b_1$ является n -правильным соответствием с соответствующим ограничением на ранги подсоответствий. Аналогично продолжим полученное соответствие при помощи $a_{\mu_2} \longrightarrow b_2$ и т.д. Пусть уже найдены такие $b_1,\ldots,b_e$, что продолжение (7) при помощи $a_{\mu_1} \longrightarrow b_1, \ldots, a_{\mu_e} \longrightarrow b_e$

является n - правильным соответствием ранга $\leq(r+1)$. И пусть $a_{\mu_e} = a_s = g+\Sigma \xi_\nu^o g^\nu$. Положим $h = b_e - \Sigma \xi_\nu^o h^\nu$. Элемент h - искомый.

4.8. Пусть $G \in L_s$. Через G_i будем обозначать подмодель модели G, которая содержит те и только те элементы x, что $p_i^{(s)i} x = O$. $G_i \in L\, p_i^{(s)i}$.

ЛЕММА I3. Дано:

0) $G, H \in L_s$; $g^\nu \in G$, $h^\nu \in H$, $\nu = 1,\ldots,k$; $g \in G$, $h \in H$.

I) Соответствие $g^\nu — h^\nu$ является n - правильным соответствием.

2) Соответствие $g_i^\nu — h_i^\nu$, $g_i — h_i$ является n - правильным соответствием элементов моделей G_i, H_i, $i = 1,\ldots,\ell(s)$.

3) Соответствие:

$$D(\Sigma \xi_\nu g^\nu + \xi g) —— D(\Sigma \xi_\nu h^\nu + \xi h) \qquad (8)$$

является n - правильным соответствием.

Тогда и $g^\nu — h^\nu$, $g — h$ является n - правильным соответствием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = \Sigma \xi_\nu g^\nu + \xi g$, $y = \Sigma \xi_\nu h^\nu + \xi h$. $x_i = \zeta_i x$, $y_i = \zeta_i y$ (см. 4.3). Так как (8) правильное соответствие, то $x_i \asymp x$ равносильно $y_i \asymp y$. Дальнейшее следует из определения в 4.3.

ЛЕММА I4. Дано:

0) $G, H \in L_s$; $g^\nu \in G$, $h^\nu \in H$, $\nu = 1,\ldots,k$; $\mathcal{E}_{ij}^1 \setminus D_{ij}^1$ и $\mathcal{E}_{ij}^2 \setminus D_{ij}^2$, $p_i^j | s$, - скачки G и H, соответственно; $g \in G$.

I) Соответствие:

$$g^\nu —— h^\nu \qquad (9)$$

является n - правильным соответствием ранга $r < n$.

2) Соответствие $D(\Sigma \xi_\nu g^\nu) —— D(\Sigma \xi_\nu h^\nu)$, $D_{ij}^1 —— D_{ij}^2$ является n - правильным соответствием.

3) a_{ij} - минимальный элемент ви-

да $p_i^{(s)_i-j} g_i + \Sigma \xi_\nu g_i^\nu$ и $a_{ij} \in \mathcal{E}_{ij}^1 \setminus D_{ij}^1$.

Тогда найдется такой $h \in H$, что продолжение (9) при помощи $g — h$ является n-правильным соответствием ранга $\leq (r+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что условия леммы I2 удовлетворяются при p_i в качестве p. Поэтому найдется такой b^i, что соответствие $g_i^\nu — h_i^\nu$, $g_i — b^i$ является n-правильным соответствием элементов моделей G_i, H_i. Положим $h = \Sigma b^i$. Теперь проверяются условия леммы I3.

4.9. Пусть $\rho_s = (S(x,y,z), x < y, P_j(x), 1 \leq j < s)$.

L_s^* есть класс таких моделей $\mathfrak{M}$ сигнатуры ρ_s, что $< |\mathfrak{M}|, \rho_1 > \in L_s$ и $\mathfrak{M}$ удовлетворяет, кроме того, следующим аксиомам, где $P(x)$ есть сокращение $P_1(x) \vee \ldots \vee P_{s-1}(x)$:

(4.4.I) $P(x) \,\&\, x \asymp y \longrightarrow P(y)$.

(4.4.2) $P(x) \longrightarrow \exists y (P_1(y) \,\&\, x \asymp y)$.

(4.4.3) $P_1(x) \longrightarrow O(x) = s$.

(4.4.4) $P_1(x) \longrightarrow P_j(jx)$, $1 \leq j < s$.

(4.4.5) $P_j(x) \,\&\, P_j(y) \,\&\, x \asymp y \longrightarrow x - y < x$, $1 \leq j < s$.

Иначе говоря, в $\mathfrak{M} \in L_s$ выбраны некоторые из таких скачков $\mathcal{E} \setminus D$, что $F = \mathcal{E}/D$ - циклическая порядка s. Элементы выбранных скачков и только они удовлетворяют P. Далее, в каждой такой циклической F выбрано по образующему. Пусть, например, $g + D$ - выбранный образующий в F. Элементы смежного класса $jg + D$ при $1 \leq j < s$, удовлетворяют предикату P_j.

Полученные выше результаты для L_s перенесем на L_s^*, а для этого достаточно:

а) первое определение из 4.6. дополнить требованием, чтобы $\mathcal{E}_\mu^1 \setminus D_\mu^1$ тогда и только тогда был выбранным скачком, когда $\mathcal{E}_\mu^2 \setminus D_\mu^2$ - выбранный скачок;

б) второе определение из 4.6. дополнить требованием:

$$P_j(\Sigma \xi_\nu g^\nu) \equiv P_j(\Sigma \xi_\nu h^\nu), \quad 1 \leq j < s;$$

в) в формулировках лемм II-I4 подставить звездочки к именам соответствующих классов;

г) в доказательстве измененной вышеуказанным образом леммы II дополнительно рассмотреть случай, когда g удовлетворяет одному из предикатов P_j. В этом случае в качестве b можно взять произвольный элемент из $\mathcal{E}^2 \setminus D^2$, удовлетворяющий P_j, а остальное оставить без изменений.

Новые леммы обозначим II^* - $I4^*$, соответственно.

§ 5. s - регулярность

5.I. Пусть $\sigma^* = (S(x,y,z),\ x<y)$. $\mathcal{K}^*$ есть класс моделей сигнатуры σ^*, удовлетворяющих аксиомам (4.I.I.)-(4.2.6) и, кроме того, аксиомам:

(5.I.5) $x_1 = x_2 \mathbin{\&} y_1 = y_2 \mathbin{\&} x_1 < y_1 \longrightarrow x_2 < y_2$.

(5.3.I) $x < y \longrightarrow \neg(y < x)$.

(5.3.2) $x < y \mathbin{\&} y < z \longrightarrow x < z$.

(5.3.3) $(x = y) \equiv [\neg(x<y) \mathbin{\&} \neg(y<x)]$.

(5.4.I) $x < y \longrightarrow x + z < y + z$.

Таким образом, если не различать элементы, связанные знаком $=$, модель класса $\mathcal{K}^*$ есть у.а.г.

5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. У.а.г. G называется s - р е г у л я р н о й, где s - положительное целое число, если она удовлетворяет аксиоме :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_s \exists y (x_1 < \ldots < x_s \longrightarrow x_1 \leqslant y \leqslant x_s \mathbin{\&} s \mid y). \quad \text{(A)}$$

Из (A) непосредственно вытекает :

$$\forall z \forall x_1 \ldots \forall x_s \exists y (x_1 < \ldots < x_s \longrightarrow x_1 \leqslant y \leqslant x_s \mathbin{\&} y \equiv z \pmod{s}). \text{(B)}$$

ЛЕММА I5. Д а н н ы е в ы ш е о п р е д е л е н и я s - р е г у л я р н о с т и э к в и в а л е н т н ы.

В самом деле, пусть G дискретна и s - регулярна в смысле [6] (остальные случаи тривиальны). И пусть $x_1 < \ldots < x_s$. Среди элементов вида $x_1 + ke$, где e - наименьший положительный элемент G, есть $x_1 + re \equiv 0 \pmod{s}$. Не нарушая общности, можно считать $0 \leqslant r < s$. Но тогда $x_1 \leqslant x_1 + re \leqslant x_s$.

ЛЕММА I6. П у с т ь $s = m \cdot n$. У.а.г. G т о г д а и т о л ь к о т о г д а s - р е г у л я р н а, к о г д а о н а и m - р е г у л я р н а и n - р е г у л я р н а.

5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть π - некоторое множество простых чисел. У.а.г. G называется π - регулярной, если она p - регулярна для всякого $p \in \pi$. Если при этом π - множество всех простых чисел, то G называется регулярной.

Архимедова группа - регулярна.

Из леммы I6 следует, что у.а.г. G тогда и только тогда s - регулярна, когда $\pi(s)$ - регулярна.

ЛЕММА I7. У. а. г. G тогда и только тогда π -регулярна, когда G/C π-полна (то есть удовлетворяет аксиоме $\forall x\,(px=0)$ при всяком $p\in\pi$) для всякой ненулевой выпуклой подгруппы C.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Пусть G - p - регулярна и $0\neq C$ - выпуклая подгруппа и $g\in G$. В $g+C$ есть элемент, делящийся на p, потому $p\mid g+C$. 2) Пусть G/C - π - полна для всякой ненулевой выпуклой C. И пусть $x_1,\dots,x_s\in G$ и $x_1<\dots<x_s$. Положим $y=min\,(x_{i+1}-x_i)$. Пусть A - объединение всех выпуклых подгрупп, не содержащих y, B - пересечение всех выпуклых подгрупп, содержащих y. И пусть $p\in\pi$. Рассмотрим отдельно 2 подслучая.

2а) $A\neq 0$. Тогда $p\mid A+x_1$. Пусть $A+x_1 = A+pz$. Тогда $x_1\leq pz+p\cdot|x_1-pz|<x_1+y\leq x_2$.

2б) $A=0$. Так как $p\mid B+x_1$, то в B найдется $b\equiv -x_1\,(mod\,p)$, то есть $p\mid b+x_1$. Но так как B архимедова, то она p - регулярна и удовлетворяет аксиоме (B). Тогда можно считать $0\leq b\leq (p-1)h$ и потому $x_1\leq x_1+b\leq x_s$.

СЛЕДСТВИЕ. Расширение π -регулярной группы при помощи π-полной π-регулярно.

5.4. Пусть π - некоторое множество простых чисел, G - у.а.г. и $0\neq g\in G$. Пусть $A(g)$ -объединение выпуклых подгрупп, не содержащих g, $B(g)$ - пересечение выпуклых подгрупп, содержащих g. $B(g)/A(g)$ - архимедова и потому π - регулярна. Пусть $A_\pi(g)$ есть пересечение таких выпуклых подгрупп C, что $B(g)/C$ - π- регулярна. Пусть $B_\pi(g)$ -объединение таких выпуклых подгрупп C, что $C/A(g)$ - π- регулярна. С помощью леммы I7 и следствия из нее без труда проверяется.

ЛЕММА I8. Пусть C - произвольная выпуклая подгруппа у. а. г. G и $0\neq g, h\in G$.

I) $B_\pi(g)/A_\pi(g)$ - π-регулярна.

2) Если $C\subset A_\pi(g)$, то $B_\pi(g)/C$ - не

π - регулярна.

3) Если $C \supset \mathcal{B}_\pi(g)$, то $C/\mathcal{A}_\pi(g)$ - не π - регулярна.

4) $[\mathcal{A}_\pi(g) \subset \mathcal{A}_\pi(h)] \to [\mathcal{B}_\pi(g) \subseteq \mathcal{A}_\pi(h)]$.

5) $\mathcal{A}_\pi(g) = \bigcup_{p \in \pi} \mathcal{A}_p(g)$.

6) $\mathcal{B}_\pi(g) = \bigcap_{p \in \pi} \mathcal{B}_p(g)$.

$\mathcal{B}_\pi(g) \setminus \mathcal{A}_\pi(g)$ будем называть π - регулярным скачком, а $C_\pi(g) \stackrel{df}{=} \mathcal{B}_\pi(g)/\mathcal{A}_\pi(g)$ - π - регулярным фактором, соответствующим g.

Таким образом, множество ненулевых элементов у.а.г. распадается в теоретико-множественную сумму непересекающихся π - регулярных скачков. Дополнительно положим $\mathcal{A}_\pi(0) = \varnothing$, $\mathcal{B}_\pi(0) = 0$, $C_\pi(0) = 0$. Вместо $\mathcal{A}_{\pi(s)}(g)$, $\mathcal{B}_{\pi(s)}(g)$, $C_{\pi(s)}(g)$ будем писать $\mathcal{A}_s(g)$, $\mathcal{B}_s(g)$, $C_s(g)$.

5.5. ЛЕММА 19. Пусть $g, h > 0$.

$[\mathcal{A}_s(g) \subseteq \mathcal{A}_s(h)] \equiv [g \leq h \vee$

$\vee \forall x \exists y (g \geqslant x \geqslant h \to |y| < sh \,\&\, y \equiv x \pmod s)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Пусть $\mathcal{A}_s(g) \subseteq \mathcal{A}_s(h) \,\&\, g \geqslant x \geqslant h$. Тогда $\mathcal{A}_s(g) = \mathcal{A}_s(h)$. В силу s - регулярности $C_s(g)$ найдется такой $z \in \mathcal{B}_s(g)$, что $\mathcal{A}_s(g) \leqslant \mathcal{A}_s(g) + z \leqslant \mathcal{A}_s(g) + (s-1)h$ и $\mathcal{A}_s(g) + z \equiv \mathcal{A}_s(g) + x \pmod s$.

Пусть $z - x + \mathcal{A}_s(g) = su + \mathcal{A}_s(g)$. Положим $y = x + su$.

2) Пусть $\mathcal{A}_s(g) \supset \mathcal{A}_s(h)$. Тогда $\mathcal{A}_s(h) \subset \mathcal{B}_s(h) \subseteq \mathcal{A}_s(g) \subset \mathcal{B}_s(g)$. и $\mathcal{B}_s(g)/\mathcal{B}_s(h)$ не S - полна. В $\mathcal{B}_s(g) \setminus \mathcal{B}_s(h)$ найдется такой x, что $x > 0$ и $s \nmid x + \mathcal{B}_s(h)$. Тогда $h < x \leqslant g$, и если $|y| < sh$, то $y \in \mathcal{B}_s(h)$ и потому $y \not\equiv x \pmod s$.

СЛЕДСТВИЕ. Предикаты $\mathcal{A}_s(g) \subset \mathcal{A}_s(h)$, $\mathcal{A}_s(g) = \mathcal{A}_s(h)$ формульны в классе $\mathcal{K}^*$.

5.6. Пусть $\alpha_i(g)$ - число независимых в обычном смысле по модулю p_i элементов группы $C_s(g)$. И пусть $\alpha_{in} = \min(\alpha_i(g), n)$. Число $\sum_{i=1}^{e(s)} \alpha_{in}(g) \cdot (n+1)^{i-1}$, если $C_s(g)$ плотна и число $\sum_{i=1}^{e(s)} n \cdot (n+1)^{i+1} + 1 = (n+1)^{e(s)}$, если $C_s(g)$ дискретна, будем называть (s, n) - нормой выпуклой подгруппы $\mathcal{A}_s(g)$ и обозначать $|\mathcal{A}_s(g)|_n$.

ЛЕММА 20. Предикат $|\mathcal{A}_s(g)|_n = k$ формульный в классе $\mathcal{K}^*$.

§ 6. s - фундаментальность

6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. s-фундаментом $D_s(g)$ элемента g у.а.г. G называется объединение таких выпуклых подгрупп C, что $C \cap (g + sG) = \Phi$. Выпуклая подгруппа называется s-фундаментальной, если она есть $D_s(g)$ для какого-нибудь g. Выпуклая подгруппа называется π-фундаментальной, если она p-фундаментальна хотя бы для одного $p \in \pi$.

СЛЕДСТВИЯ. Пусть C - произвольная выпуклая подгруппа у. а. г. G, $g, h \in G$.

1) $s \mid g \equiv D_s(g) = \Phi$;

2) $D_s(g) \cap (g + sG) = \Phi$;

3) $C = D_s(g)$ равносильно $C = D_s(g + C)$, где $D_s(g + C)$ есть s-фундамент элемента $g + C$ у. а. г. G/C.

4) Если $D_s(g) \subseteq D_s(h)$, то $D_s(g+h) \subseteq D_s(h)$. Если $D_s(g) \subset D_s(h)$, то $D_s(g+h) = D_s(h)$.

5) $D_n(g) \subseteq D_{mn}(g)$, где m и n - положительные целые числа. Нетрудно при $m > 1$ построить пример, когда $D_n(g) \subset D_{m \cdot n}(g)$.

6) $D_{m \cdot n}(mg) = D_n(g)$.

7) Пусть $C = D_{p^s}(g) \supset D_p(g)$. Тогда найдется такое число j, что $D_{p^j}(g) \subset D_{p^{j+1}}(g) = C$. При этом в C есть элемент $h \equiv g \ (mod\ p^j)$. Пусть $g - h = p^j g'$. Тогда $D_p(g') = D_{p^{j+1}}(g-h) = D_p(g) = C$.

Отсюда и из 6) следует, что C тогда и только тогда p^s-фундаментальна, когда p-фундаментальна.

8) $\forall g \forall h [D_s(g) \subseteq A_s(h) \vee B_s(h) \subseteq D_s(g)]$.

Иначе говоря, s-фундаментальная подгруппа либо не пересекается с s-регулярным скачком, либо полностью содержит его.

9) $D_s(g) \subseteq A_s(g)$.

10) $D_s(g) = \bigcap_{h\in g+sG} A_s(h)$.
11) $D_s(g) = max\,(D_{p_i^{(s)_i}},\ 1 \le i \le \ell(s))$.

Отсюда и из предыдущего следует, что C тогда и только тогда s-фундаментальна, когда $\pi(s)$-фундаментальна.
12) Пусть $p\,|\,s$ и $D_s(pg) \subset D_s(h)$.
Тогда в $D_s(h)$ есть $g^1 \equiv ph\,(mod\ s)$.
Отсюда $p\,|\,g^1$. Пусть $g^1 = pg^2$.
При этом $g^2 \in D_s(h)$.
13) G тогда и только тогда π-регулярна, когда $\forall g\,(D_\pi(g) \subseteq O)$.

6.2. Множество элементов h таких, что $D_s(h) \subset D_s(g)$, образует подгруппу. Обозначим её $D_s^*(g)$.

$[D_s(g) \subset D_s(h)] \equiv [D_s^*(g) \subset D_s^*(h)]$; $\varepsilon_s(g) \overset{df}{=} \langle \hat{h}(D_s(h) \subseteq D_s(g)), S \rangle$;

$F_s(g) \overset{df}{=} \varepsilon_s(g)/D_s^*(g)$. $\varepsilon_s(g) \setminus D_s^*(g)$ будем называть s-скачком у.а.г. G .

Если $\exists h(D_s(g) = A_s(h))$, то выпуклая подгруппа $D_s(g)$ уже имеет (s, n) - норму. (См. 5.6.)

Пусть $\neg \exists h(D_s(g) = A_s(h))$. Число

$$(n+1)^{\ell(s)} + \beta_n(F_s(g))$$

(см. 4.3) будем называть в этом случае (s, n) - нормой s-фундаментальной подгруппы $D_s(g)$ и обозначать $|D_s(g)|_n$.

Пусть

$$m = m(s,n) = (n+1)^{\ell(s)} + \sum_{p_i^j | s} n\cdot(n+1)^{(s)_1+\dots+(s)_{i-1}+j-1} + 1 =$$

$$= (n+1)^{\ell(s)} + (n+1)^{(s)_1+\dots+(s)_{\ell(s)}} .$$

Выпуклые подгруппы вида $A_s(g)$ и $D_s(g)$ у.а.г. G с приписанными им выше (s, n) - нормами и отношением включения с точностью до обозначения предикатов образуют m-цепь, которую мы будем обозначать $T_{s,n}(G)$.

6.3. Пусть P_{sj} означает, что существует такой h , что $D_s(g) = A_s(h)$, и что при этом $G_s(h)$ дискретна и $A_s(h)+g \equiv A_s(h)+je\,(mod\ s)$ в $G/A_s(h)$, где

$A_s(h)+e$ – наименьший положительный элемент $C_s(h)$; $1 \le j < s$.

Пусть

$G_s = \langle G/sG,\ \mathcal{D}_s(g) \subset \mathcal{D}_s(h),\ P_{sj}(g),\ 1 \le j < s \rangle$.

Без труда проверяется, что G_s есть элемент $\mathcal{L}_s^*$ (см. 4.9), но с той лишь несущественной оговоркой, что вместо $g < h$ и $P_j(g)$ мы здесь пишем $\mathcal{D}_s(g) \subset \mathcal{D}_s(h)$ и $P_{sj}(g)$, соответственно.

При гомоморфизме (групповом) $G \to G/sG$ подгруппы $\mathcal{D}_s^*(g)$ и $\mathcal{E}_s(g)$ переходят в $\mathcal{D}(g+sG)$ и $\mathcal{E}(g+sG)$. И, наоборот, полные прообразы $\mathcal{D}(g+sG)$ и $\mathcal{E}(g+sG)$ есть $\mathcal{D}_s^*(g)$ и $\mathcal{E}_s(g)$. $F_s(g) \cong F(g+sG)$. Элемент $\zeta_i g$ (см. замечание в 4.3) переходит в $(g+sG)_i$.

Переформулируем для дальнейших ссылок необходимое определение и лемму 14*.

6.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Соответствие

$$g^\nu \longleftrightarrow h^\nu, \tag{I}$$

где $g^\nu \in G$, $h^\nu \in H$, $\nu = 1,\dots,\kappa$, G и H – у.а.г., называется (s,n) - п р а в и л ь н ы м, если:

1) Соответствие $\mathcal{D}_s(\sum \xi_\nu g^\nu) \longleftrightarrow \mathcal{D}_s(\sum \xi_\nu h^\nu)$, где $\xi_1,\dots,\xi_\kappa$ пробегают всевозможные целые числа, есть изоморфизм подмоделей $T_{s,n}(G)$ и $T_{s,n}(H)$.

2) Пусть $\sum \xi'_\nu g^\nu, \dots, \sum \xi^\ell_\nu g^\nu$ – все элементы вида $\sum \xi_\nu g^\nu$, принадлежащие $\mathcal{E}(\sum \xi'_\nu g^\nu)$. Тогда $\sum \xi'_\nu h^\nu, \dots, \sum \xi^\ell_\nu h^\nu$ – все элементы вида $\sum \xi_\nu h^\nu$, принадлежащие $\mathcal{E}(\sum \xi'_\nu h^\nu)$, и соответствие

$$\begin{aligned} &\sum \xi'_\nu g^\nu + \mathcal{D}_s^*(\sum \xi'_\nu g^\nu) \longleftrightarrow \sum \xi'_\nu h^\nu + \mathcal{D}_s^*(\sum \xi'_\nu h^\nu), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (\mathrm{I}') \\ &\sum \xi^\ell_\nu g^\nu + \mathcal{D}_s^*(\sum \xi'_\nu g^\nu) \longleftrightarrow \sum \xi^\ell_\nu h^\nu + \mathcal{D}_s^*(\sum \xi'_\nu h^\nu) \end{aligned}$$

есть n - правильное соответствие элементов групп $F_s(\sum \xi_\nu g^\nu)$, $F_s(\sum \xi_\nu h^\nu) \in \mathcal{K}_s$.

3) $P_{sj}(\sum \xi_\nu g^\nu) \equiv P_{sj}(\sum \xi_\nu h^\nu)$, $1 \le j < s$.

Рангом соответствия (I) называется максимальный среди рангов соответствий вида (I').

СЛЕДСТВИЕ. П у с т ь (I) – (s,n) - п р а в и л ь н о е соответствие и $m|s$. Тогда

$$m|\sum \xi_\nu g^\nu \longrightarrow m|\sum \xi_\nu h^\nu.$$

ЛЕММА 21. Дано

0) G, H – у.а.г.; $g^\nu \in G$, $h^\nu \in H$, $\nu = 1,\dots,k$; $\mathcal{E}^1_{ij} \setminus \mathcal{D}^{1*}_{ij}$ и $\mathcal{E}^2_{ij} \setminus \mathcal{D}^{2*}_{ij}$, $P^j_i|s$ – s-скачки G и H, соответственно;

I) Соответствие

$$g^\nu \longleftrightarrow h^\nu \qquad (2)$$

(s,n) – правильное соответствие ранга $\tau < n$.

2) Соответствие $\mathcal{D}_s(\sum \xi_\nu g^\nu) \longleftrightarrow \mathcal{D}_s(\sum \xi_\nu h^\nu)$, $\mathcal{D}^1_{ij} \longleftrightarrow \mathcal{D}^2_{ij}$ есть изоморфизм подмоделей $T_{s,n}(G)$ и $T_{s,n}(H)$.

3) a_{ij} есть элемент с минимальным s-фундаментом среди элементов вида $P_i^{(s)_{i-j}} \zeta_i g + \sum \xi_\nu \zeta_i g^\nu_i$ и $a_{ij} \in \mathcal{E}^1_{ij} \setminus \mathcal{D}^{1*}_{ij}$.

Тогда найдется такой $h \in H$, что продолжение (2) при помощи $g \longleftrightarrow h$ есть (s,n) -правильное соответствие ранга $\leq (\tau+1)$.

Замечание. Из предыдущего ясно и легко проверяется непосредственно, что всевозможные $\mathcal{D}_s(\xi_\nu g^\nu + \xi g)$ исчерпываются всевозможными $\mathcal{D}_s(\xi_\nu g^\nu)$ и $\mathcal{D}^1_{ij}$.

6.5. ЛЕММА 22. Пусть $g, h \in G$. Тогда

I) $\mathcal{D}_s(g) \subset A_s(h)$ равносильно

$$\exists x[A_s(x) \subset A_s(h) \ \& \ x \equiv g \pmod s] .$$

2) $A_s(g) \subset \mathcal{D}_s(h)$ равносильно

$$\forall y[y \equiv h \pmod s \rightarrow A_s(g) \subset A_s(y)] .$$

3) $\mathcal{D}_s(g) \subset \mathcal{D}_s(h)$ равносильно

$$\exists x[x \equiv g \pmod s \ \& \ A_s(x) \subset \mathcal{D}_s(h)] .$$

ЛЕММА 23. Предикат $|\mathcal{D}_s(g)|_n = k$ – формульный в $\mathcal{K}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Высказывание $\beta(G) = k$ формульно в $\mathcal{K}_s$.

Пусть $\mathfrak{A}$ – формула из $\Phi\ (\sigma_0)$, соответствующая высказыванию $\beta\ (G) = k - (n+1)^{\ell(s)}$. Заменив в $\mathfrak{A}$ предикат $S\ (x, y, z)$ предикатом $D_s(x+y-z) \subset D_s(g)$ и ограничив кванторы предикатом $D_s(x) \subseteq D_s\ (g)$, получим искомую формулу.

§ 7. $T_{s,n}\ (G)$

7.I. ЛЕММА 24. При всяких s и n существуют такие формульные в $\mathcal{K}^*$ (см. 5.I) предикаты $g < h$ и $|g| = k$, $1 \le k < m = m(s,n)$, (см. 6.2), что если $G \in \mathcal{K}^*$, то

$$< |G|,\ g < h,\ |g| = k,\ 1 \le k < m >$$

есть m-цепь, изоморфная $T_{s,n}\ (G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$|g| = k \overset{df}{\equiv} [s|g\ \&\ |A_s(g)|_n = k] \vee [s \nmid g\ \&\ |D_s(g)|_n = k]\ ;$$

$$g < h \overset{df}{\equiv} [s|g\ \&\ s|h \longrightarrow A_s(g) \subset A_s\ (h)\ ]\ \&$$

$$\&\ [s|g\ \&\ s \nmid h \longrightarrow A_s(g) \subset D_s(h)\ ]\ \&$$

$$\&\ [s \nmid g\ \&\ s\ |\ h \longrightarrow D_s(g) \subset A_s(h)\ ]\ \&$$

$$\&\ [s \nmid g\ \&\ s \nmid h \longrightarrow D_s(g) \subset D_s(h)\ ]\ .$$

При строящемся изоморфизме подгруппе $A_s(g)$ соответствуют элементы из $B_s(g) \setminus A_s\ (g)$, делящиеся на s, и все такие элементы h, что $D_s\ (h) = A_s\ (g)$. Таким образом, пустому множеству, которое мы считаем здесь выпуклой подгруппой и элементом $T_{s,n}\ (G)$, соответствует множество, состоящее из одного единственного элемента – нуля.

Пусть $\neg \exists h\ (D_s(g) = A_s(h))$, выпуклой подгруппе $D_s\ (g)$ соответствует $\hat{h}\ (D_s(h) = D_s(g))$.

Отметим здесь, что набор элементов $T_{s,n}\ (G)$ зависит лишь от $\pi\ (s)$. (s,n) -норма $|A_s\ (g)|\ _n$ зависит также от n. (s,n) - норма $|D_s\ (g)|\ _n$ зависит и от $(s)_i$, $1 \le i \le \ell(s)$.

7.2. Введем следующие формульные в T_m (см. 3.I.) предикаты $(m = m(s,n))$:

$\alpha_i(x)$, $\beta_{ij}(x)$, $\gamma_i(x)$, $1 \le i \le \ell(s)$, $1 \le j \le (s)_i$.

Положим $\alpha_i(x)=1$, $\beta_{ij}(x)=0$,если $|x|=(n+1)^{\ell(s)}$.

Положим $\alpha_i(x)=0$, $\beta_{ij}(x)=\beta_{ij}$, если

$$|x|=(n+1)^{\ell(s)}+\sum \beta_{ij}(n+1)^{(s)_1+\ldots+(s)_{i-1}+j-1}.$$

Наконец, $\gamma_i(x) \overset{df}{=} \alpha_i(x)+\beta_{i1}(x)+\ldots+\beta_{i(s)_i}(x)$. Далее, пусть

$$Q_i^1(x,y) \overset{df}{\equiv} \alpha_i(x)=0 \;\&\; \gamma_i(x)\neq 0 \;\&\; x<y \;\&$$
$$\forall z\,[x<z\le y \to \gamma_i(z)=0];$$

$$Q_i^1(x) \overset{df}{\equiv} \alpha_i(x)\neq 0 \;\vee\; \exists y\, Q_i^1(x,y);$$

$$Q_i^2(x) \overset{df}{\equiv} \alpha_i(x)=0 \;\&\; \gamma_i(x)\neq 0 \;\&\neg\exists y\, Q_i^1(x,y) \equiv$$
$$\equiv \exists j(\beta_{ij}(x)\neq 0) \;\&\; \forall y\,[x<y \to \exists z(x<z\le y \;\&\; \gamma_i(z)\neq 0)];$$

$$Q_i^3(x) \overset{df}{\equiv} Q_i^2(x) \;\&\; \forall y\,[x<y \to \exists z\,(x<z\le y \;\&\; Q_i^1(z))];$$

$$Q_i^2(x,y) \overset{df}{\equiv} Q_i^2(x) \;\&\; x<y \;\&\; \forall z\,(x<z\le y \to \neg Q_i^1(z));$$

$$Q_i^4(x) \overset{df}{\equiv} \exists y\, Q_i^2(x,y).$$

Очевидно, $\gamma_i(x) \equiv Q_i^1(x) \vee Q_i^2(x)$, $\neg(Q_i^1(x) \;\&\; Q_i^2(x))$,

$Q_i^2(x) \equiv Q_i^3(x) \vee Q_i^4(x)$, $\neg(Q_i^3(x) \;\&\neg Q_i^4(x))$.

7.3. Нетрудно проверить, что $T_{s,n}(G)$ удовлетворяет следующим аксиомам:

(а) $\exists x(|x|=0 \;\&\; \forall y\,(x\le y))$,

(в) $x<y \;\&\; |y|=0 \to \exists z\,(x<z<y \;\&\; |z|\neq 0)$,

(с$_1$) $|x|>(n+1)^{\ell(s)} \to \exists y\,(x<y)$,

(с$_2$) $x<y \;\&\; |x|>(n+1)^{\ell(s)} \to \exists z(x<z<y \;\&\; |z|\le (n+1)^{\ell(s)})$.

Пусть $x, y \in T_{s,n}(G)$ и $Q_i^1(x,y)$.И пусть $g\in G$ и

$g \in y \setminus x$, это имеет смысл, так как x и y - подгруппы G. И пусть $p_i \nmid g$. Тогда $\gamma_i(Dp_i(g)) \neq 0$ и $Dp_i(g) \leq Ap_i(g) \subset y$. Но, по определению $Q_i^1(x,y)$, в этом случае $Dp_i(g) \leq x$. Это означает (в силу следствий 3) и 13) из 6.1.), что y/x p_i-регулярна. А тогда $\beta_{ij}(x)=0$ при $1 \leq j < (s)_i$.

Таким образом, $T_{s,n}(G)$ удовлетворяют аксиомам

$$(d_i) \quad \exists y\, Q_i^1(x,y) \longrightarrow \gamma_i(x) = \beta_{i(s)_i}(x).$$

Конъюнкцию всех выписанных в этом пункте аксиом обозначим $\mathcal{L}_m^*$. Класс m - цепей, удовлетворяющих $\mathcal{L}_m^*$, обозначим T_m^*.

7.4. ЛЕММА 25. Пусть $T \in T_m^*$. Тогда найдется такая у. а. г. G, что $\Phi(T_{s,n}(G)) = \Phi(T)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не нарушая общности, можно считать T счетной. Построим такую у.а.г. G, что $T_{s,n}(G) \cong T$.

Пусть $k = \sum_{i=1}^{e(s)} \alpha_i (n+1)^{i-1}$ и $0 \leq \alpha_i \leq n$. Обозначим через G_k^1 архимедово упорядоченную прямую сумму α_i групп типа $\mathcal{R}_{p_1}, \ldots, \alpha_{e(s)}$ групп типа $\mathcal{R}_{p_{e(s)}}$, где $\mathcal{R}_m$ - упорядоченная естественным образом группа рациональных чисел (по сложению), знаменатели которых взаимно просты с m. Через G_k^2 обозначим $\mathcal{R}_m$, где $m = \prod_{\alpha_i=0} p_i$.

Пусть теперь $y \in T$ и $|y| = k$. Поставим в соответствие y у.а.г. $G_y = G_k^1 \dot{+} G_k^2$, где знак $\dot{+}$ есть знак лексикографически упорядоченной прямой суммы, причем G_k^1 - выпуклая подгруппа в G_y.

Пусть $y \in T$ и $|y| = (n+1)^{e(s)}$. Поставим в соответствие y у.а.г. G_y, изоморфную группе целых чисел.

Пусть $A_0 = \sum^{\cdot}_{|y| \leq (n+1)^{e(s)}} G_y$. Здесь $\sum^{\cdot}$ означает лексикографически упорядоченную прямую сумму, причем элементы, имеющие отличные от нуля компоненты лишь в G_{y_1}, по модулю меньше элементов, имеющих отличные от нуля компоненты лишь в G_{y_2} при $y_1 < y_2$.

Через a_y обозначим один из элементов, имеющих отличные от нуля компоненты лишь в G_y, таких, что $p_i \nmid a_y$ при $p_i \mid s$.

Пусть B есть минимальная полная у.а.г., содержащая A_0 в качестве подгруппы.

A. Пусть $\exists y\, Q_i^1(x,y)$. Легко видеть, что $\hat{y}\, Q_i^1(x,y)$ выпукло в T и содержит последовательность, сходящуюся к x. Разобьем $\hat{y}\, Q_i^1(x,y)$ на $\gamma_i(x) = \beta_{i(s)_i}(x)$ подмножеств, каждое из которых содержит последовательность, сходящуюся к x. И если y и z попали в одно и то же подмножество, то выделим в B элементы

$$\frac{a_y - a_z}{p_i^{\xi}}, \quad \xi = 1, 2, \ldots \tag{I}$$

Один из элементов вида a_y, где $Q_i^1(x, y)$, обозначим через a_x.

Пусть A_{oxi} – наименьшая подгруппа $\mathcal{B}$, содержащая A_o и выделенные элементы (I). И пусть D – наибольшая выпуклая подгруппа A_{oxi}, не содержащая элементов a_y при $Q_i^1(x, y)$. Легко видеть, что $\alpha_i(D) = 0$ и $\beta_{ij}(D) = 0$ при $j < (s)_i$, а $\beta_{i(s)_i}(D) = \beta_{i(s)_i}(x)$.

Пусть A_1 – наименьшая подгруппа $\mathcal{B}$, содержащая все A_{oxi}, где $i = 1, \ldots, \ell(s)$, а x пробегает все такие элементы, что $\exists y\, Q_i^1(x, y)$.

Б. Перенумеруем все такие элементы $z \in T$, что $Q_i^3(z)$: $z_1, z_2, \ldots$.

Так как $Q_i^3(z)$, то существует такая последовательность $\{y_{k\nu}\}$, что

Б.I. $Q_i^1(y_{k\nu})$,

Б.2. $y_{k1} > y_{k2} > \ldots$,

Б.3. $\lim y_{k\nu} = z_k$.

Так как $\{y_{i\nu}\} \cap \{y_{j\mu}\}$ конечно при $i \neq j$, то, очевидно, можно считать,

Б.4. $\{y_{i\nu}\} \cap \{y_{j\mu}\} = \emptyset$.

Выделим в $\mathcal{B}$ элементы

$$\frac{a_{k\nu} - a_{k\mu}}{p_i^1}, \tag{2}$$

где $a_{k\nu} = a_{y_{k\nu}}$,

$$\nu \equiv \mu \equiv \beta_{i1}(z_k) + \ldots + \beta_{i(j-1)}(z_k) + \xi \pmod{\gamma_i(z_k)},$$

где $0 < \xi \leq \beta_{ij}(z_k)$; $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть A_{1i} – наименьшая подгруппа $\mathcal{B}$, содержащая A_1 и выделенные элементы (2). И пусть D – наибольшая выпуклая подгруппа A_{1i}, не содержащая элементов $a_{y_{k\nu}}$ при фиксированном k и $\nu = 1, 2, \ldots$. Легко видеть, что

$$\alpha_i(D) = 0, \quad \beta_{ij}(D) = \beta_{ij}(z_k), \quad 1 \leq j \leq (s)_i.$$

Пусть A_2 есть наименьшая подгруппа $\mathcal{B}$, содержащая все

A_{1i} , $i=1,\ldots,\ell(s)$.

В. Пусть $x, y \in T$ и $Q_i^2(x, y)$. Каждый элемент отрезка $[x, y]$ удовлетворяет предикату $\gamma_i(x) \neq 0 \to Q_i^4(x)$. Пусть Z - наибольшая выпуклая подмодель T , содержащая $[x,y]$, каждый элемент которой удовлетворяет предикату $\gamma_i(x) \neq 0 \to Q_i^4(x)$. На множестве элементов $z \in Z$, для которых $\gamma_i(z)=0$, определим отношение эквивалентности

$$P_i(x, y) \overset{df}{\equiv} \forall z\,(x \leq z \leq y \vee y \leq z \leq x \to \gamma_i(z)=0).$$

Для каждых x, y таких, что $P_i(x, y)$, выделим в $\mathcal{B}$ элементы

$$\frac{a_x - a_y}{p_i^{\xi}}, \quad \xi = 1, 2, \ldots \quad . \tag{3}$$

Зафиксируем в каждом классе эквивалентности по $P_i(x, y)$ один элемент. Пусть Z^* – подмодель Z , содержащая все элементы $x \in Z$ с $\gamma_i(x) \neq 0$ и те среди элементов $y \in Z$ с $\gamma_i(y)=0$, которые оказались зафиксированными.

Перенумеруем все элементы $x \in Z^*$ с $\gamma_i(x) \neq 0$: $x_1, x_2, \ldots$. Аналогично тому, как мы это делали в Б , каждому x_k поставим в соответствие такую последовательность $\{y_{k\nu}\}$ элементов Z^* , что

В.I.I. $\gamma_i(y_{k\nu}) = 0$,

В.I.2. $y_{k1} > y_{k2} > \ldots$,

В.I.3. $\lim y_{k\nu} = x_k$,

В.I.4. $\{y_{i\nu}\} \cap \{y_{j\mu}\} = \emptyset$.

Кроме того, мы можем считать, что $\bigcup_k \{y_{k\nu}\}$ исчерпывает все такие $y \in Z^*$ с $\gamma_i(y) = 0$, что существует такой $x \in Z^*$, что $x < y \;\&\; \gamma_i(x) \neq 0$.

Выделим в $\mathcal{B}$ элементы

$$\frac{a_{k\nu} - a_{k\mu}}{p_i^{j}}, \tag{4}$$

где $a_{k\nu} = a_{y_{k\nu}}$,

$$\nu \equiv \mu \equiv \beta_{i1}(x_k) + \ldots + \beta_{i(j-1)}(x_k) + \xi \pmod{\gamma_i(x_k)},$$

где $0 < \xi \leq \beta_{ij}(x_k)$; $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть теперь $a_k = a_{y_{k1}}$, $\xi_k = \min(j, \beta_{ij}(x_k) \neq 0)$, $a_{k\nu}^1$ - один из элементов (4) при некотором $\mu > \nu$.

Каждому $y_{k\nu}$ поставим в соответствие последовательность

$\{x_{k(e)}\}$ элементов Z^* со следующими свойствами:

В.2.1. $\gamma_i(x_{k(e)}) \neq 0$,

В.2.2. $x_{k(1)} = x_k$,

В.2.3. $x_{k(1)} < x_{k(2)} < \ldots$,

В.2.4. $\lim x_{k(e)} = y_{k\nu}$ (в Z^*).

Выделим в $\mathcal{B}$ элементы

$$a_{k\nu}^2 = \frac{a_{k\nu}^1 - a_{k(2)}}{p_i^{\xi k(2)}} , \quad a_{k\nu}^3 = \frac{a_{k\nu}^2 - a_{k(3)}}{p_i^{\xi k(3)}} , \ldots \tag{5}$$

при каждых k, ν .

Г. Пусть $y \in T$ и $\gamma_i(y) = 0$, и $\neg \exists x\, Q_i^1(x, y)$ и $\neg \exists x\, Q_i^2(x, y)$. Пусть $y_1, y_2, \ldots$ – все такие элементы. Выделим в $\mathcal{B}$ элементы

$$\frac{a_{y_k}}{p_i^{\xi}} , \quad \xi = 1, 2, \ldots ; k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Пусть G – наименьшая подгруппа $\mathcal{B}$, содержащая $\mathcal{A}_2$ и элементы, выделенные в (3)-(6) при всех возможных Z и i .

У.а.г. G искомая.

З а м е ч а н и е. Если s – степень простого числа p_i , то $Q_i^1(x) \to \alpha_i(x) \neq 0$, $P_i(x, y) \to x \simeq y$, то есть пункт А и начало пункта В соответствуют тому, что мы "склеиваем" распавшиеся p_i – регулярные скачки. (При $\pi_1 < \pi_2$ π_1– регулярный скачок распадается, вообще говоря, в теоретико-множественную сумму π_2 – регулярных скачков.)

Положение p_i – фундаментальной подгруппы полностью определяется тем сечением, которое она производит в ряду p_i – регулярных скачков.

Итак, пусть s – степень p_i и G' – наименьшая подгруппа $\mathcal{B}$, содержащая $\mathcal{A}_0$ и элементы (2), (4) при всевозможных Z . $T_{s,n}(G')$ отличается от T лишь тем, что на месте элементов y с $\gamma_i(y) = 0$ стоят элементы y' с $\alpha_i(y') = 1$. Этим диктуется необходимость выделения элементов (5) и (6).

§ 8. $\mathcal{U}$ -замыкания

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. 1 - з а м ы к а н и е м п о д м о д е л и M у. а. г. G н а з ы в а е т с я п о д м о д е л ь M_1 , с о с т о я щ а я и з э л е м е н т о в M , и м п р о -

тивоположных, и нуля. u - замыканием подмодели M, где u - положительное целое число, называется подмодель M_u, состоящая из всех элементов x вида

$$x = \sum_{i=1}^{u^2} a_i \, . \quad a_i \in M_1 \, .$$

ЛЕММА 26. Дано:

0) $w \geqslant 1, \ v = (3w^2)!, \ u = v^2$; G, H - у.а.г.; M - подмодель G, N - подмодель H, φ - изоморфизм M на N, допускающий продолжение до изоморфизма

$$\varphi^* M_u = N_u \, ; \quad g \in G, \ h \in H.$$

I) $vg \in M_v, \ vh \in N_v, \ \varphi^* vg = vh$.

или

2) $vg \bar{\in} M_v, \ vh \bar{\in} N_v$ и подмодели $\langle M_v, vg\rangle$ и $\langle N_v, vh\rangle$ изоморфны как у.м., причем этот изоморфизм на M_v совпадает с φ^*

Тогда продолжение φ при помощи $g \to h$ есть изоморфизм ψ, допускающий продолжение до изоморфизма $\psi^* \langle M, g\rangle_w = \langle N, h\rangle_w$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) $vg \in M_v$. Легко проверить, что если $x \in \langle M, g\rangle_w$, то $vx \in M_v$ и $v\psi^* x = \varphi^* vx$.

Пусть теперь $x, y, z \in \langle M, g\rangle_w$.

Если $x + y = z$, то $\psi^* x + \psi^* y = \frac{1}{v}(\varphi^* vx + \varphi^* vy) = \frac{1}{v}\varphi^* vz = \psi^* z$.

Если $x < y$, то и $\psi^* x - \psi^* y = \frac{1}{v}(\varphi^* vx - \varphi^* vy) < 0$.

2) $vg \bar{\in} M_v$. Пусть $x, y, z \in \langle M, g\rangle_w$ и $x = \alpha g + x'$, $y = \beta g + y'$, $z = \gamma g + z'$, где $x', y', z' \in M_w$.

2а) $x + y = z$. Если $\alpha + \beta = \gamma$, то, очевидно, $\psi^* x + \psi^* y = \psi^* z$.

Пусть $\alpha + \beta \neq \gamma$. Тогда $0 = x + y - z = (\alpha + \beta - \gamma)g - (z' - x' - y') = vg - \frac{v}{\alpha + \beta - \gamma}(z' - x' - y')$, откуда, $vg \in M_v$.

2б) $x < y$. Если $\alpha = \beta$, то, очевидно, $\psi^* x < \psi^* y$. Пусть $\alpha \neq \beta$ и, для определенности, $\alpha > \beta$. Тогда

$\frac{v}{\alpha-\beta}(x-y)=vg-\frac{v}{\alpha-\beta}(y'-x')<0$, то есть $vg<\frac{v}{\alpha-\beta}(y'-x')\in M_v$.

Тогда и $vh<\frac{v}{\alpha-\beta}(\varphi*y'-\varphi*x')\in N_v$, откуда $\frac{v}{\alpha-\beta}(\varphi*x-\varphi*y)<0$, $\varphi*x<\varphi*y$.

§ 9. Классификация

9.I. Введем следующие примитивно-рекурсивные функции:

$$\alpha(k)=(3k^2)! \quad \beta(k)=(\alpha(k))^2.$$

$$\begin{cases}\gamma(0)=1,\\ \gamma(k+1)=\beta(\gamma(k)).\end{cases}$$

$$\begin{cases}\delta(0)=1,\\ \delta(k+1)=\delta(k)\cdot\alpha(\gamma(k)).\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varepsilon(0)=0,\\ \varepsilon(k+1)=2\left[\varepsilon(k)\cdot\alpha(\gamma(k))+\delta(k)\right].\end{cases}$$

$$e'(k)=(k)_1+\ldots+(k)_{e(k)}.\quad t(k)=e'(\delta(k))+2.$$

Вместо $T_{\delta(n),n}(G)$ будем писать $T_n(G)$.

Пусть s - положительное целое число. Определим на у. а.г. G функцию $\rho(g)$ следующим образом:

I) $\rho(0)=0$.

2) Если $C_s(g)$ плотна, то $\rho(g)=\infty$.

3) Пусть $C_s(g)$ дискретна, $e+\mathcal{A}_s(g)$ - наименьший положительный элемент $C_s(g)$ и m - целое число. Тогда

$$\rho(g)=\begin{cases}|m|, & \text{если } g+\mathcal{A}_s(g)=me+\mathcal{A}_s(g).\\ \infty, & \text{если } \forall m\,[|g+\mathcal{A}_s(g)|>me+\mathcal{A}_s(g)].\end{cases}$$

Легко видеть, что значение функции $\rho(g)$ не зависит от s. Можно было бы в определении $\rho(g)$ вместо $\mathcal{A}_s(g)$ и $C_s(g)$ использовать $\mathcal{A}(g)$ и $C(g)=\mathcal{B}(g)/\mathcal{A}(g)$, где $\mathcal{B}(g)\setminus\mathcal{A}(g)$ - архимедовый скачок, содержащий g.

9.2. ЛЕММА 27. П у с т ь G и H - у. а. г. и в $\Gamma_n(G,H)$ с д е л а н о k х о д о в $(k=0,1,\ldots,n)$:

$$g^\nu \longrightarrow h^\nu,\quad \nu=1,\ldots,k. \qquad (A_k)$$

И п у с т ь п р и э т о м:

(a_k) С о о т в е т с т в и е (A_k) п р о д о л ж а е т с я до изоморфизма

$\varphi_k < g^1, \dots, g^k >_{\gamma(n-k)} = < h^1, \dots, h^k >_{\gamma(n-k)}$.

($в_k$) Соответствие

$$\frac{\delta(n)}{\delta(n-k)} g^\nu \longrightarrow \frac{\delta(n)}{\delta(n-k)} h^\nu, \quad \nu = 1, \dots, k. \quad (В_k)$$

есть $(\delta(n), n)$- правильное соответствие ранга $\leqslant k$.

(c_k) Если $x \in < g^1, \dots, g^k >_{\gamma(n-k)}$, то

$$\rho(x) < \varepsilon(n-k) \vee \rho(\varphi_k x) < \varepsilon(n-k) \longrightarrow \rho(x) = \rho(\varphi_k x).$$

(d_k) После k ходов в игре

$\Gamma_{(t(n), \dots, t(n))}(T_n(G), T_n(H))$ с n ходами сложилась ситуация:

$$\begin{cases} D_{\delta(n-k)}(\sum \xi_\nu g^\nu) \longrightarrow D_{\delta(n-k)}(\sum \xi_\nu h^\nu), \\ A_{\delta(n)}(x) \longrightarrow A_{\delta(n)}(\varphi_k x), \end{cases}$$

где $\xi_1, \dots, \xi_k$ пробегают всевозможные целые числа, а $x \in < g^1, \dots, g^k >_{\gamma(n-k)}$, и II имеет при доигрывании в.с.

Тогда II имеет в.с. при доигрывании $\Gamma_n(G, H)$.

Доказательство тривиально при $k = n$. Пусть $k < n$ и для $k+1$ лемма уже доказана. И пусть I на $(k+1)$-ом ходу игры $\Gamma_n(G, H)$ выбрал элемент $g^{k+1} \in G$. В силу симметрии условий достаточно ограничиться рассмотрением этого случая.

Для краткости и связи с предыдущим введем следующие обозначения:

$$\delta(n) = s, \quad \gamma(n-k-1) = w, \quad \alpha(\gamma(n-k-1)) = V,$$

$$\gamma(n-k) = u, \quad < g^1, \dots, g^k > = M, \quad < h^1, \dots, h^k > = N.$$

А. Пусть оказалось, что $Vg \in M_V$. В силу следствия определения из 6.4. $V \mid \varphi_k(Vg)$. В этом случае II на $(k+1)$-ом ходу игры $\Gamma_n(G, H)$ выбирает элемент $h^{k+1} = \frac{1}{V}\varphi_k(Vg)$. Условие (a_{k+1}) выполнено в силу леммы 26. Напомним, что если $x \in < M, g >_w$, то $Vx \in M_V$. Отсюда следует (C_{k+1}), так как $\varepsilon(n-k) < V \cdot \varepsilon(n-k-1)$. Кроме того, $\delta(n-k) = V \cdot \delta(n-k-1)$, и потому $\frac{\delta(n)}{\delta(n-k-1)} = \frac{\delta(n)}{\delta(n-k)} V$. Отсюда следует (d_{k+1}) и $(в_{k+1})$.

В. Переходим к рассмотрению случая: $vg \vec{\in} M_v$.

В.I. Пусть c_1 – ближайший слева, а c_2 –ближайший справа к vg_0^{k+1} элементы M_v и $d = c_2 - c_1$, и пусть для определенности $vg^{k+1} - c_1 \leq c_2 - vg^{k+1}$. Обозначим тогда $g = vg^{k+1} - c_1$.

Пусть a_{ij} – элемент с наименьшим S – фундаментом среди элементов вида

$$p_i^{(s)_i - j} \zeta_i g + \sum_\nu \xi_\nu \zeta_i \frac{\delta(n)}{\delta(n-k)} g^\nu$$

(см. замечание в 4.3.).

Будем считать, что на $(k+1)$ – ом ходу игры $\Gamma_{(t(n),\dots,t(n))}(T_n(G), T_n(H))$ игрок I выбрал элементы $D_S(a_{ij})$ при всех таких i и j , что $p_i{}^j | s$, и элемент $\mathcal{A}_S(g)$(а если $k=0$, то и $\emptyset \subset G$) в $T_n(G)$. Пусть D_{ij} и $\mathcal{A}$ – соответствующие элементы, которые II выбрал в $T_n(H)$, пользуясь в.с. при доигрывании (если $k=0$, то II , кроме этих элементов, выбирает также $\emptyset \subset H$).

В силу леммы 2I найдется такой $b \in H$, что продолжение $(\mathcal{B}_k)$ при помощи $g \longleftrightarrow b$, а потому и продолжение $(\mathcal{B}_k)$ при помощи

$\frac{\delta(n)}{\delta(n-k)} g \longleftrightarrow \frac{\delta(n)}{\delta(n-k)} b$ есть (S, n) – правильное соответствие ранга $\leq (k+1)$.

Отметим, что (см. 6.3) при $1 \leq j \leq s$ и $\frac{\delta(n)}{\delta(n-k)} \Big| j$

$$P_{\delta(n)j}\left(\frac{\delta(n)}{\delta(n-k)} \cdot x\right) \equiv P_{\delta(n-k)\frac{j\delta(n-k)}{\delta(n)}}(x) .$$

Отсюда $P_{\delta(n-k)j}(g) \equiv P_{\delta(n-k)j}(b), \quad 1 \leq j < \delta(n-k)$.

В.2. Пусть нам удалось найти такой $h \in H$, что

а) $h \equiv b \pmod{\delta(n-k)}$,

б) $\mathcal{A}_S(h) = \mathcal{A}$,

в) $\mathcal{A} < 2h + \mathcal{A} \leq \varphi_k d + \mathcal{A}$ в $H/\mathcal{A}$,

г) $\rho(g) < v \cdot \varepsilon(n-k-1) \vee \rho(h) < v \cdot \varepsilon(n-k-1) \longrightarrow \rho(g) = \rho(h)$.

При этом, не нарушая общности, мы можем считать, что

д) $0 < 2h \leq \varphi_k d$.

В самом деле, если $2h > \varphi_k d$, то $a = 2h - \varphi_k d \in \mathcal{A}$, и в качестве h мы можем взять $h^* = h - \delta(n-k) \cdot a$.

Так как $vg^{k+1} = c_1 + g$, то в силу следствия определения из 6.4. $v \mid \varphi_k c_1 + h$. В этом случае на $(k+1)$ –ом ходу игры $\Gamma_n(G, H)$ игрок II выбирает элемент $h^{k+1} = \frac{1}{v}(\varphi_k c_1 + h)$.

В.2.I. При этом условии (a_{k+1}) выполнено в силу леммы 26.

В.2.2. В силу выбора b выполнено условие (b_{k+1}) .

В.2.3. Пусть $x = \xi g - \sum \xi_\nu g^\nu$ - произвольный элемент из $\langle M, g\rangle_w$. Для проверки условия (d_{k+1}) нам теперь, очевидно, достаточно показать, что если $A_s(x) = A_s(g)$, то $A_s(\varphi_{k+1}, x) = A$, а если $A_s(x) \neq A_s(g)$, то найдется такой $a \in M_v$, что $A_s(x) = A_s(a)$ и $A_s(\varphi_{k+1}, x) = A_s(\varphi_k a)$. При этом достаточно ограничиться случаем $\xi \neq 0$. Заметим, что

$$\left|\frac{v}{\xi} x\right| = \left|v g^{k+1} - \frac{v}{\xi} \sum \xi_\nu g^\nu\right| \geqslant g,$$

откуда $A_s(x) \supseteq A_s(g)$.

Пусть $y = \frac{v}{\xi} \sum \xi_\nu g^\nu \leqslant c_1$, тогда $\left|\frac{v}{\xi} x\right| = g + a$, где $a \in M_u$ и $a > 0$. В этом случае $\left|\frac{v}{\xi} \varphi_{k+1} x\right| = h + \varphi_k a$. Если $A_s(a) \subseteq A_s(g)$, то $A_s(x) = A_s(g)$ и $A_s(\varphi_{k+1}, x) = A$, а если $A_s(a) \supset A_s(g)$, то $A_s(x) = A_s(a)$ и $A_s(\varphi_{k+1}, x) = A_s(\varphi_k a)$.

Пусть $y \geqslant c_2$, тогда $\left|\frac{v}{\xi} x\right| = a' - g$, где $a' \in M_u$ и $a' \geqslant 2g$, и проверка аналогична.

Но так как $y \in M_v$, то либо $y \leqslant c_1$, либо $y \geqslant c_2$.

В.2.4. Проверим условие (c_{k+1}). Сохраним обозначения п. В.2.3. Пусть $\rho(x) < \varepsilon(n-k-1)$, случай $\rho(\varphi_{k+1} x) < \varepsilon(n-k-1)$ разбирается аналогично. Ограничимся также лишь разбором случая $\left|\frac{v}{\xi} x\right| = a' - g$, где $a' \in M_u$ и $a' \geqslant 2g$. Случай $\left|\frac{v}{\xi} x\right| = g + a$, где $a \in M_u$ и $a > 0$, проще. При этом $\left|\frac{v}{\xi} \varphi_{k+1} x\right| = \varphi_k a' - h$. Если $A_s(a') \subset A_s(g)$, то

$$\left|\frac{v}{\xi}\right| \cdot \rho(x) = \rho\left(\left|\frac{v}{\xi} x\right|\right) = \rho(g) < v \cdot \varepsilon(n-k-1).$$

Тогда $\left|\frac{v}{\xi}\right| \cdot \rho(\varphi_{k+1} x) = \rho(h) = \rho(g)$. Откуда, $\rho(x) = \rho(\varphi_{k+1} x)$. Если $A_s(a') \supset A_s(g)$, то $\left|\frac{v}{\xi}\right| \cdot \rho(x) = \rho(a') < \varepsilon(n-k)$ и поэтому $\left|\frac{v}{\xi}\right| \cdot \rho(\varphi_{k+1} x) = \rho(\varphi_k a') = \rho(a')$ и $\rho(x) = \rho(\varphi_{k+1} x)$. Если $A_s(a') = A_s(g)$, то $\rho(g) \leqslant \rho(a' - g) < v \cdot \varepsilon(n-k-1)$ и потому $\rho(g) = \rho(h)$. Кроме того, $2(a' - g) = (a' - 2g) + a' \geqslant a'$ и потому $\rho(a') \leqslant 2\rho(a' - g) < \varepsilon(n-k)$. Отсюда $\rho(a') = \rho(\varphi_k a')$ и $\rho(a' - g) = \rho(\varphi_k a' - h)$ и $\rho(x) = \rho(\varphi_{k+1} x)$.

В.3. Переходим к выбору h. Введем дополнительные обозначения: $\delta(n-k) = t$; B есть верхняя подгруппа того s - регулярного скачка у.а.г. H, нижней подгруппой которого является A; $C = B/A$. Отметим, что так как

$$D_t(g) = D_s\left(\frac{s}{t} g\right) \subseteq A_s\left(\frac{s}{t} g\right) = A_s(g) \subseteq A_s(d),$$ то в силу выбора D_{ij} и A $D_t(b) \subseteq A \subseteq A_s(\varphi_k d)$.

Не нарушая общности, мы можем считать, что $b \in B \setminus A$ и $b > 0$.

I) $C_S(g)$ плотна. Тогда и C плотна. Если $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_S(\varphi_k d)$, то положим $h = b$. Если $\mathcal{A} = \mathcal{A}_S(\varphi_k d)$, то в силу t-регулярности и плотности $C_S(g)$ найдется такой $c \in H$, что $\mathcal{A} < 2c + \mathcal{A} \leqslant \varphi_k d + \mathcal{A}$ и $c + \mathcal{A} \equiv b + \mathcal{A} (\mathrm{mod}\, t)$. Пусть $c - b + \mathcal{A} = ta + \mathcal{A}$. Положим $h = b + ta$.

2) $C_S(g)$ дискретна. Тогда и C дискретна. Пусть $e \in G$ и $e + \mathcal{A}_S(g)$ – наименьший положительный элемент $C_S(g)$. Пусть $f \in H$ и $f + \mathcal{A}$ – наименьший положительный элемент C. В силу дискретности и t-регулярности $C_S(g)$ среди чисел $1, \dots, t$ найдется такое число j, что $g + \mathcal{A}_S(g) \equiv je + \mathcal{A}_S(g) (\mathrm{mod}\, t)$. В силу (I) (см. В.I) в этом случае $b + \mathcal{A} \equiv jf + \mathcal{A} (\mathrm{mod}\, t)$.

2.а) $\rho(g) < V\, \varepsilon(n-k-1)$. Тогда $\rho(g) \equiv j (\mathrm{mod}\, t)$. Поэтому найдется такой c, что $\rho(g) f - b + \mathcal{A} = tc + \mathcal{A}$. Положим $h = b + tc$.

2.б) $\rho(g) \geqslant V \cdot \varepsilon(n-k-1)$.

Среди элементов $V \cdot \varepsilon(n-k-1) f + \mathcal{A}, \dots, (V \cdot \varepsilon(n-k-1) + t - 1) f + \mathcal{A}$ найдётся $\ell f + \mathcal{A} \equiv jf + \mathcal{A} (\mathrm{mod}\, t)$. Пусть $\ell f - b + \mathcal{A} = tc + \mathcal{A}$. Положим $h = b + tc$.

Итак, во всех возможных случаях мы подобрали элемент h, удовлетворяющий условиям а) – г).

Лемма 27 доказана.

9.3. Положим теперь $k = 0$ в лемме 27. Получается, что если II имеет в.с. в $\Gamma_{(t(n), \dots, t(n))}(T_n(G), T_n(H))$, то он имеет в.с. и в $\Gamma_n(G, H)$. Отсюда с помощью лемм I – 3 следует

ТЕОРЕМА I. (теорема о классификации). Пусть G и H – у. а. г. Существует такая примитивно-рекурсивная функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(n)$, что если $\Phi_{\mathcal{N}(n)}(T_n(G)) = \Phi_{\mathcal{N}(n)}(T_n(H))$, то $\Phi_n(G) = \Phi_n(H)$.

Примечания. I) Можно выписать равенства, задающие функцию $\mathcal{N} = \mathcal{N}(n)$. 2) Существует примитивно-рекурсивная функция $M = M(n, k)$, такая, что если $\Phi_{M(n,k)}(G) = \Phi_{M(n,k)}(H)$, то $\Phi_k(T_n(G)) = \Phi_k(T_n(H))$. Это непосредственно следует из леммы 24.

СЛЕДСТВИЕ I. $\Phi(G) = \Phi(H)$ тогда и только тогда, когда при всяком n

$$\Phi(T_n(G)) = \Phi(T_n(H)).$$

Пусть G – у.а.г. Построим следующую ω-цепь, которую будем называть $T_\omega(G)$. Берем $T_1(G)$. Приписываем справа элемент x_1 без нормы, так что каждый элемент из $T_1(G)$ предшествует x_1. Затем в естественном порядке выписываем $T_2(G)$, так что x_1 предшествует каждому элементу из $T_2(G)$. Затем приписываем справа элемент x_2 без нормы и т.д.

СЛЕДСТВИЕ 2. $\Phi(G) = \Phi(H)$ равносильно $\Phi(T_\omega(G)) = \Phi(T_\omega(H))$.

Пусть $T'_\omega(G)$ и $T'_\omega(H)$ -у.м.,ассоциированные с $T_\omega(G)$ и $T_\omega(H)$, соответственно (см. 3.4.).

СЛЕДСТВИЕ 3. $\Phi(G)=\Phi(H)$ равносильно $\Phi(T'_\omega(G))=\Phi(T'_\omega(H))$.

9.4. СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть G и H - $\delta(n)$- регулярные и дискретные у. а. г. . Тогда $\Phi_n(G)=\Phi_n(H)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть G и H - $\delta(n)$- регулярные и плотные у. а. г. .И пусть $\alpha_i(G)$ (соответственно, $\alpha_i(H)$) есть число независимых по модулю p_i элементов G (соответственно, H) и $min(\alpha_i(G),n)=min(\alpha_i(H),n)$ при всех таких i , что $p_i/\delta(n)$.Тогда $\Phi_n(G)=\Phi_n(H)$.

Из следствий 4 и 5 вытекает признак элементарной эквивалентности регулярных групп, найденный в [5] .

Из теоремы I следует справедливость условий элементарной эквивалентности, найденных в [7] для класса у.а.г., который там рассматривается. Когда G лежит в этом классе, то $\Phi_n(G)$конечна при всяком n . Требование вполне упорядоченности выпуклых подгрупп можно опустить.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть C - выпуклая подгруппа у. а. г.G.Тогда $\Phi(G)=\Phi(C+\cdot G/C)$.

Отметим, что следствия 4–6 можно непосредственно доказать при помощи лемм I и 26.

§ IO. Разрешимость элементарной теории у.а.г.

IO.I. ЛЕММА 28. Пусть $\mathcal{K}$ -класс моделей сигнатуры σ и $\Phi(\mathcal{K})$рекурсивно аксиоматизируема.И пусть по каждому n мы можем эффективно построить такие формулы $\alpha_{n1},\dots,\alpha_{n\varphi(n)}$, что:

а) $\Phi(\mathcal{K})\vdash\alpha_{n1}\vee\dots\vee\alpha_{n\varphi(n)}$,

б) α_{ni} выполнима в $\mathcal{K}$,

в) Если $\mathfrak{M},\mathfrak{N}\in\mathcal{K}$ и $\alpha_{ni}\in\Phi(\mathfrak{M})\cap\Phi(\mathfrak{N})$, то $\Phi_n(\mathfrak{M})=\Phi_n(\mathfrak{N})$.

Тогда $\Phi(\mathcal{K})$ разрешима.

ТЕОРЕМА 2. (о разрешимости). Элементарная теория у. а. г. разрешима в том и только том случае, если разрешима элементарная теория у.м.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Пусть разрешим класс у.м.. Тогда по лемме 5 разрешима $\Phi(T_\omega)$.

Пусть $m = m(\delta(n), n)$. В силу конечности сигнатуры τ_m в $\Phi_{\mathcal{N}(n)}(\tau_m)$, где $\mathcal{N} = \mathcal{N}(n)$ - функция, о которой идет речь в теореме I, есть лишь конечное число таких формул, которые имеют пренексную форму, а бескванторные части их имеют дизъюнктивную нормальную форму. Пусть эти формулы: $\mathscr{L}_1^1, \mathscr{L}_2^1, \ldots$. Составим всевозможные формулы $\mathscr{L}_i^2 = \mathscr{L}_1 \,\&\, \mathscr{L}_2 \,\&\, \ldots$, где $\mathscr{L}_j$ есть $\mathscr{L}_j^1$ или $\neg \mathscr{L}_j^1$. Множество этих формул удовлетворяет требованиям а) и в) из 10. I при $\mathcal{K} = T_m^*$ и $\mathcal{N}(n)$ в качестве того n, о котором там шла речь. Заметим, что (см. § 7) $(\mathscr{L}_m^* \longrightarrow \mathscr{L}_i^2) \in \Phi(T_m)$ равносильно $\mathscr{L}_i^2 \in \Phi(T_m^*)$. Но $\Phi(T_m) = \Phi(T_\omega) \cap \Phi(\tau_m)$.

Пользуясь разрешимостью $\Phi(T_\omega)$, отберем среди формул $\mathscr{L}_i^2$ те, что $\neg \mathscr{L}_i^2 \bar{\in} \Phi(T_m^*)$, то есть выполнимые в T_m^*. Пусть эти формулы: $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{\varphi(n)}$. Согласно лемме 24, мы в состоянии написать такие формулы $\mathfrak{A}_{n1}, \ldots, \mathfrak{A}_{n\varphi(n)}$, что для всякой у.а.г. G и $i = 1, \ldots, \varphi(n)$ $\mathfrak{A}_{ni} \in \Phi(G)$ равносильно $\mathscr{L}_i \in \Phi(T_n(G))$.

Используя леммы 25 и 27, найдём, что а) - в) для формул $\mathfrak{A}_{n1}, \ldots, \mathfrak{A}_{n\varphi(n)}$ и $\mathcal{K} = \mathcal{K}^*$ выполнены.

Б. Пусть $\Phi(\mathcal{K}^*)$ разрешима. Выберем некоторое целое число $s > 1$. Предикат $x < y \overset{df}{\equiv} A_s(x) \subset A_s(y)$ - формульный в $\mathcal{K}^*$. Предикат $P(x)$, обозначающий, что $C_s(x)$ дискретна, -формульный в $\mathcal{K}^*$. Для завершения доказательства теоремы 2 остается применить лемму 4.

СЛЕДСТВИЕ. Класс полугрупп положительных элементов у. а. г., то есть коммутативных полугрупп с сокращением, удовлетворяющих аксиомам:

$$\exists z\,(z = x - y \vee z = y - x),\quad x \neq 0,\quad x \neq -y.$$

разрешим.

Из теоремы I и леммы 28 следует также разрешимость класса регулярных (а потому и архимедовых -см. [5]) у. а. г.

Литература

I. Ehrenfeucht A. Decidability of the theory of linear ordering relation. (Abstract). AMSN, vol 6(1959), pp 268-269.

2. Ehrenfeucht A. An applikation of games to the completenes problem for formaliezed theories. Fund.Math. XLIX.1.(1960),pp 129-141.

3. Тайманов А.Д. Характеристики аксиоматизируемых классов моделей. Сб. "Алгебра и логика. Семинар", I962,т.I, вып. 4, 5-3I.

4. Курош А.Г. Теория групп, I953, М.

5. Robinson A.and Zakon E. Elementary properties ordered abelian groups Trans.of Amer.Math.Soc.,(1960),96,№ 9,pp222-236

6. Zakon E. Generalized archimedian groups.Trans.of Amer. Math. Soc.,(1961),99,№1,pp 21-40.

7. Каргаполов М.И. Классификация упорядоченных абелевых групп по элементарным свойствам. Сб. "Алгебра и логика. Семинар", I963, т. 2, вып. 2, 3I-46.