DE INVESTIGANDO ORDINE SYSTEMATIS AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM VULGARIUM CUJUSCUNQUE

AUCTORE

C. G. J. JACOBI,
PROF. ORD. MATH. REGIOM.

Borchardt Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 64 p. 297—320.

DE INVESTIGANDO ORDINE SYSTEMATIS AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM VULGARIUM CUJUSCUNQUE.

(Ex Ill. C. G. J. Jacobi manuscriptis posthumis in medium protulit C. W. Borchardt.)

1.

Investigatio ad solvendum problema inaequalitatum reducitur.

Systema aequationum differentialium vulgarium est *non canonicum**), si aequationes altissima variabilium dependentium differentialia tali modo continent, ut horum valores ex iis petere non liceat. Id quod fit, quoties aequationes nonnullae altissimis illis differentialibus carentes in systemate proposito vel ipsae inveniuntur vel eliminatione ex eo obtinentur. *Eo casu numerus Constantium arbitrariarum, quas integratio completa inducit, sive ordo systematis semper minor est summa altissimorum ordinum, ad quos differentialia singularum variabilium in aequationibus differentialibus propositis ascendunt.* Qui ordo systematis cognoscitur, si per differentiationes et eliminationes contingit systema propositum redigere in aliud forma canonica gaudens eique aequivalens, ita ut de systemate canonico etiam ad propositum reditus pateat. Nam summa altissimorum ordinum, ad quos in systemate canonico differentialia singularum variabilium dependentium ascendunt, etiam systematis propositi non canonici ordo erit. Ad quem ordinem investigandum non tamen opus est ea ad formam canonicam reductione, sed res per considerationes sequentes absolvi potest.

Ponamus, inter variabilem independentem t atque n variabiles dependentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ haberi n aequationes differentiales

$$(1) \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_n = 0,$$

sitque

$$h_k^{(i)}$$

*) Systema, quod hic canonicum seu forma canonica gaudens appellatur, idem est, quod in „theoria novi multiplicatoris" forma normali praeditum vocatur (diarii Crelliani tom. 29, p. 369. Conf. huj. ed. vol. IV, p. 501), sed plane differt ab eo, cui Jacobi in Commentatione „nova methodus, aequat. diff. partiales primi ordinis integrandi" (diarii Crelliani tom. 60, p. 121. Conf. h. vol. p. 128) nomen canonici tribuit. B.

altissimus ordo, ad quem in aequatione $u_i = 0$ differentialia variabilis x_k ascendunt. Ac primum observo, quaestionem revocari posse ad casum simpliciorem, quo aequationes differentiales propositae sunt lineares. Etenim variando aequationes (1), inter variationes

$$(2)\quad \delta x_1 = \xi_1,\quad \delta x_2 = \xi_2,\quad \ldots,\quad \delta x_n = \xi_n$$

obtinemus systema aequationum differentialium *linearium*

$$(3)\quad v_1 = 0,\quad v_2 = 0,\quad \ldots,\quad v_n = 0,$$

eritque rursus $h_k^{(i)}$ altissimus ordo, ad quem differentialia ipsius $\xi_k = \delta x_k$ in aequatione $v_i = \delta u_i = 0$ ascendunt. Quarum aequationum differentialium linearium (3) datur integratio completa, si pro valoribus $k = 1, 2, \ldots, n$ ponitur

$$(4)\quad \xi_k = \delta x_k = \beta_1 \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_2} + \cdots,$$

ubi per $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ illas Constantes arbitrarias designamus, quas valores completi variabilium $x_1, x_2, \ldots, x_n$ integratione aequationum (1) eruti involvunt, per $\beta_1, \beta_2, \ldots$ vero eas Constantes arbitrarias, quas integratio systematis (3) inducit. Unde idem fit numerus Constantium arbitrariarum in integratione completa aequationum differentialium propositarum (1) atque linearium (3), sive utriusque systematis idem ordo est.

In explorando ordine systematis aequationum differentialium linearium (3) supponere licet, Coëfficientes esse Constantes. Eo autem casu integratio completa methodo nota obtinetur, nulla ad formam canonicam reductione facta. Designemus per symbolum

$$(\xi)_m$$

expressionem

$$A_0 \xi + A_1 \frac{d\xi}{dt} + A_2 \frac{d^2\xi}{dt^2} + \cdots + A_m \frac{d^m \xi}{dt^m} = (\xi)_m,$$

in qua $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ sunt Constantes, gaudebunt aequationes (3), si Coëfficientes earum constantes ponimus, hac forma,

$$(5)\quad \begin{cases} v_1 = (\xi_1)_{h_1'} + (\xi_2)_{h_2'} + \cdots + (\xi_n)_{h_n'} = 0, \\ v_2 = (\xi_1)_{h_1''} + (\xi_2)_{h_2''} + \cdots + (\xi_n)_{h_n''} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = (\xi_1)_{h_1^{(n)}} + (\xi_2)_{h_2^{(n)}} + \cdots + (\xi_n)_{h_n^{(n)}} = 0. \end{cases}$$

Pono in his aequationibus

$$\xi_k = C_k e^{\lambda t},$$

designantibus C_k et λ Constantes, obtinetur e (5):

$$(6) \quad \begin{cases} 0 = C_1[\lambda]_{h_1'} + C_2[\lambda]_{h_2'} + \cdots + C_n[\lambda]_{h_n'}, \\ 0 = C_1[\lambda]_{h_1''} + C_2[\lambda]_{h_2''} + \cdots + C_n[\lambda]_{h_n''}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 = C_1[\lambda]_{h_1^{(n)}} + C_2[\lambda]_{h_2^{(n)}} + \cdots + C_n[\lambda]_{h_n^{(n)}}, \end{cases}$$

siquidem per

$$[\lambda]_m$$

functio quantitatis λ integra ordinis m^{ti} designatur.

Eliminatis $C_1, C_2, \ldots, C_n$, prodit aequatio algebraica, cujus radices suggerunt valores, quos λ induere potest, et cuique radici sive valori ipsius λ respondet systema valorum ipsarum $C_1, C_2, \ldots, C_n$, quos omnes per eandem Constantem arbitrariam multiplicare licet. Jungendo cujusque variabilis ξ_k valores singulis radicibus respondentes, prodit ejus valor completus, et cum singularum variabilium valores sic provenientes iisdem Constantibus arbitrariis afficiantur, aequationum (5) integratio completa tot inducit Constantes arbitrarias, quot sunt ipsius λ valores. Unde ordo systematis aequationum differentialium linearium (3) vel etiam ipsarum aequationum differentialium propositarum (1) aequatur gradui aequationis algebraicae, qua λ definitur. Quam aequationem repraesentare licet hoc modo

$$(7) \quad 0 = \Sigma \pm [\lambda]_{h_1'} [\lambda]_{h_2''} \ldots [\lambda]_{h_n^{(n)}},$$

eritque gradus Determinantis ad dextram aequalis *maximo* ex $1.2.3\ldots n$ aggregatis, quae e sequente

$$h_1' + h_2'' + \cdots + h_n^{(n)}$$

proveniunt, indices inferiores aut superiores omnimodis permutando. Unde jam nacti sumus hanc Propositionem memorabilem:

Propositio I. *Inter variabilem independentem t atque n variabiles dependentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ habeantur n aequationes differentiales*

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_n = 0,$$

sitque

$$h_k^{(i)}$$

altissimus ordo, ad quem in aequatione $u_i = 0$ differentialia variabilis x_k ascen-

dunt. Jam si vocatur

$$H$$

maximum e 1.2.3...n *aggregatis*

$$h_1^{(i_1)}+h_2^{(i_2)}+\cdots+h_n^{(i_n)},$$

quae obtinentur sumendo pro indicibus

$$i_1, \; i_2, \; \ldots, \; i_n$$

quoscunque inter se diversos ex indicibus 1, 2, ..., n; *erit H ordo systematis aequationum differentialium propositarum sive numerus Constantium arbitrariarum, quas earum integratio completa inducit.*

Maximum in antecedentibus voco valorem nullo alio aggregati propositi minorem, ita ut plura maxima locum habere possint inter se aequalia, diversis indicum $i_1, i_2, \ldots, i_n$ systematis respondentia.

Gradus aequationis algebraicae (7) non minuitur, nisi in Determinante ad dextram posito Coëfficiens altissimae quantitatis λ potestatis evanescit. Obtinetur autem altissimae ipsius λ potestatis Coëfficiens, si in formando Determinante cuique functioni integrae rationali $[\lambda]_{h_k^{(i)}}$ substituimus Coëfficientem altissimae seu $h_k^{(i)\text{tae}}$ ipsius λ potestatis, quem designabo per

$$[c]_{h_k^{(i)}},$$

atque ex omnibus Determinantis terminis

$$\pm[c]_{h_1^{(i_1)}}[c]_{h_2^{(i_2)}}\cdots[c]_{h_n^{(i_n)}}$$

eos tantum servamus, in quibus summa indicum

$$h_1^{(i_1)}+h_2^{(i_2)}+\cdots+h_n^{(i_n)}$$

valorem maximum H obtinet. Quare nunquam locum habet reductio gradus, nisi pro duobus pluribusve indicum $i_1, i_2, \ldots, i_n$ systematis aggregatum antecedens eundem valorem maximum induit atque summa productorum

$$\pm[c]_{h_1^{(i_1)}}[c]_{h_2^{(i_2)}}\cdots[c]_{h_n^{(i_n)}}$$

illis indicum systematis respondentium suisque signis sumtorum evanescit. Aequabatur autem in antecedentibus $[c]_{h_k^{(i)}}$ Coëfficienti termini $\delta\dfrac{d^{h_k^{(i)}}x_k}{dt^{h_k^{(i)}}}$ e variatione functionis u_i provenientis, sive positum erat

$$[c]_{h_k^{(i)}} = \frac{\partial u_i}{\partial \frac{d^{h_k^{(i)}} x_k}{dt^{h_k^{(i)}}}}.$$

Quod si tenemus, haec emergit altera Propositio antecedentis supplementaria.

Propositio II. *Vocetur*

$$u_k^{(i)}$$

differentiale partiale ipsius u_i *sumtum secundum variabilis* x_k *altissimum, quod functio* u_i *involvit, differentiale (i. e. ordinis* $h_k^{(i)}$*). Ex omnibus terminis Determinantis*

$$\Sigma \pm u_1' u_2'' \ldots u_n^{(n)}$$

ii soli retineantur $\pm u_1^{(i_1)} u_2^{(i_2)} \ldots u_n^{(i_n)}$, *in quibus summa ordinum differentialium singularum variabilium, secundum quae in singulis*

$$u_1^{(i_1)}, \quad u_2^{(i_2)}, \quad \ldots, \quad u_n^{(i_n)}$$

differentiatio partialis facta est, valorem maximum H obtinet. Jam si aggregatum terminorum Determinantis remanentium designatur Determinantis signum uncis includendo hoc modo

$$(\Sigma \pm u_1' u_2'' \ldots u_n^{(n)}),$$

ordo systematis aequationum differentialium

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_n = 0$$

tum demum valore illo maximo H inferior erit, si habetur

$$(\Sigma \pm u_1' u_2'' \ldots u_n^{(n)}) = 0,$$

quae ubi locum non habet aequatio, ordo systematis semper valori maximo H aequatur.

Nacti sumus antecedentibus novum genus formularum, Determinantia *manca*

$$(\Sigma \pm u_1' u_2'' \ldots u_n^{(n)}).$$

Cujusmodi quantitas evanescens indicio est, ordinem systematis aequationum differentialium

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_n = 0$$

per indolem illarum aequationum peculiarem diminutionem pati.

Explorato ordine systematis aequationum differentialium quarumcunque, via sternitur ad inveniendam methodum, qua ipsa reductio earum in formam canonicam praestari possit. Sed in hac Commentatione sufficiat, in naturam maximi, de quo agitur, et quomodo commode inveniatur, accurate inquirere.

2.

De solutione problematis inaequalitatum, quo investigatio ordinis systematis aequationum differentialium quarumcunque innititur. Proposito schemate, definitur Canon. Dato Canone quocunque, invenitur simplicissimus.

Antecedentibus investigatio ordinis systematis aequationum differentialium vulgarium revocata est ad sequens problema inaequalitatum etiam per se tractatu dignum:

Problema.

Disponantur nn quantitates $h_k^{(i)}$ *quaecunque in schema Quadrati, ita ut habeantur n series horizontales et n series verticales, quarum quaeque est n terminorum. Ex illis quantitatibus eligantur n transversales, i. e. in seriebus horizontalibus simul atque verticalibus diversis positae, quod fieri potest* $1.2\ldots n$ *modis; ex omnibus illis modis quaerendus est is, qui summam n numerorum electorum suppeditet maximam.*

Dispositis quantitatibus $h_k^{(i)}$ in figuram quadraticam

$$\begin{array}{cccc} h_1' & h_2' & \ldots & h_n' \\ h_1'' & h_2'' & \ldots & h_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_1^{(n)} & h_2^{(n)} & \ldots & h_n^{(n)}, \end{array}$$

earum systema appellabo *schema propositum;* omne schema, inde ortum addendo singulis ejusdem seriei horizontalis terminis eandem quantitatem, appellabo *schema derivatum.* Sit

$$l^{(i)}$$

quantitas addenda terminis i^{tae} seriei horizontalis, quo facto singula $1.2\ldots n$ aggregata transversalia, inter quae maximum eligendum est, eadem augebuntur quantitate

$$l'+l''+\cdots+l^{(n)} = L,$$

quippe ad singula aggregata formanda e quaque serie horizontali unus eligendus est terminus. Qua de re si statuitur

$$h_k^{(i)}+l^{(i)} = p_k^{(i)}$$

atque aggregatum transversale maximum e terminis $h_k^{(i)}$ formatum

$$h_1^{(i_1)}+h_2^{(i_2)}+\cdots+h_n^{(i_n)} = H,$$

fit valor aggregati transversalis maximi e terminis $p_k^{(i)}$ formati

$$p_1^{(i_1)}+p_2^{(i_2)}+\cdots+p_n^{(i_n)} = H+L,$$

et vice versa. Itaque ad maximum propositum inveniendum perinde est, sive quaestio de quantitatibus $h_k^{(i)}$, sive de quantitatibus $p_k^{(i)}$ instituatur.

Faciamus, quantitates $l', l'', \ldots, l^{(n)}$ sic determinatas esse, ut, quantitatibus $p_k^{(i)}$ ad instar quantitatum $h_k^{(i)}$ in figuram quadraticam dispositis et e quaque serie verticali termino maximo electo, maxima illa omnia in diversis seriebus horizontalibus jaceant. Unde si $p_k^{(i_k)}$ vocatur maximus terminorum

$$p'_k,\ p''_k,\ \ldots,\ p_k^{(n)},$$

aggregatum

$$p_1^{(i_1)}+p_2^{(i_2)}+\cdots+p_n^{(i_n)}$$

inter omnia aggregata transversalia e quantitatibus $p_k^{(i)}$ formata erit maximum. Hoc igitur casu sine negotio etiam habetur maximum aggregatum transversale e quantitatibus propositis $h_k^{(i)}$ formatum

$$h_1^{(i_1)}+h_2^{(i_2)}+\cdots+h_n^{(i_n)}.$$

Unde solutum est inaequalitatum problema propositum, simulatque inventae sunt quantitates $l', l'', \ldots, l^{(n)}$ dictae conditioni satisfacientes.

Figuram quadraticam, in qua diversarum verticalium maxima simul in diversis seriebus horizontalibus sunt, brevitatis causa vocabo Canonem. Patet, in ejusmodi *Canone* terminos omnes eadem quantitate augeri vel diminui posse; unde sequitur, e quantitatibus $l', l'', \ldots, l^{(n)}$ unam pluresve nullitati aequari posse, dum reliquae fiant positivae. Si $l^{(i)}=0$, series $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \ldots, p_n^{(i)}$ eadem est atque series figurae propositae $h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, \ldots, h_n^{(i)}$, unde Canonis seriem, cui respondet quantitas l evanescens, vocabo in sequentibus seriem *immutatam.* Jam ex omnibus solutionibus una erit simplicissima, in qua scilicet singulae quantitates $l^{(i)}$ valores minimos positivos induunt, ita ut nulla alia detur, pro qua aliquae quantitatum $l^{(i)}$ valores inferiores obtinent, dum reliquae immutatae manent. Canonem ei solutioni respondentem appellabo *Canonem simplicissimum,* de cujus habitu in sequentibus agam.

Ad schema quadraticum quodcunque sequentes denominationes refero, quae bene tenendae sunt. Sub voce *seriei* semper intelligam *horizontalem;* si de verticalibus sermo incidit, id diserte adjicietur. Sub voce *maximi* semper intelligam terminum inter omnes ejusdem *verticalis* maximum seu certe nullo reliquorum minorem. Unde appellabo *seriei maximum* eum seriei horizontalis terminum, qui maximus est inter omnes cum eo in eadem verticali positos. Fieri potest, ut series nullum maximum habeat vel etiam plura inter se diversa.

At si figura Canonis instar constituta est, quaeque series uno certe maximo gaudet, quod, si in eadem serie plura insunt, semper ita sumere licet, ut omnia diversarum serierum maxima ad diversas verticales pertineant, i. e. *maximorum transversalium systema completum* forment. Consideremus in Canone simplicissimo horum maximorum systema, et si plura ejusmodi dantur, unum aliquod eligamus. Jam distribuamus omnes series quocunque modo in duas partes, series J et series K tales, ut nulla serierum K immutata sit, i. e. nulla quantitatum l, quae ad series K pertinent, evanescat: dico haberi

Theorema I. *In Canone simplicissimo e maximis serierum K saltem unum est, cui aequalis exstat terminus in eadem verticali positus et ad series J pertinens.*

Alioquin enim quantitates l ad series K pertinentes omnes eadem quantitate minuere liceret, usque dum aut una quantitatum l evanesceret, aut unum e maximis serierum K aequale evaderet alicui termino in eadem verticali posito et ad series J pertinenti. Neque enim ea re maxima diversarum serierum cessarent esse maxima, neque Canonis constitutio turbaretur. Quantitates l autem propositae eo casu non forent minimae positivae neque igitur Canon foret simplicissimus.

Si pro seriebus K sumitur series singularis, sequitur e Theoremate praecedente hoc alterum

Theorema II. *In Canone simplicissimo seriei uniuscunque non immutatae maximo aequatur alter terminus in eadem verticali.*

Proposito Canone simplicissimo, rursus eligamus unum certum systema completum maximorum transversalium. In serie quacunque α_1^{ta}, cui respondet quantitas l non-evanescens, sumatur *maximum*, cui secundum II in eadem verticali sit aequalis terminus seriei α_2^{tae}, in qua rursus sumatur *maximum*, cui aequatur in eadem verticali terminus seriei α_3^{tae}, et ita porro. Si dato *maximo* plures aequantur termini in eadem verticali, processus praescriptus pluribus modis institui potest, sed habetur

Theorema III. *In Canone simplicissimo e variis modis a data serie per processum praescriptum ad alias transeundi unus semper exstat, quo pervenitur ad seriem immutatam, i. e. seriem, cui respondet valor $l = 0$.*

Nam simulac Theorema III locum non habet, Canonis series in duo complexus dividantur, quorum primus omnes series amplectatur, ad quas a data serie per processum praescriptum transire licet, et secundus omnes, ad quas transire non licet, ita ut series immutatae omnes in secundo complexu sint. Quo facto primum complexum pro seriebus K, secundum pro seriebus J Theorematis I sumere licet. Ergo secundum Theorema I a serie primi complexus ad seriem secundi transitus datur, quod 'est contra hypothesin. Unde suppositio, Theorema III locum non habere, est absurda.

Canonem quemcunque, pro quo quantitates l', l'', $\ldots$, $l^{(n)}$ respective induunt valores m', m'', $\ldots$, $m^{(n)}$, quos semper positivos aut evanescentes suppono, in sequentibus brevitatis causa vocabo Canonem $(m', m'', \ldots, m^{(n)})$. Quo statuto, de binis Canonibus quibuscunque habetur

Theorema IV. *Propositis binis Canonibus, primo $(f', f'', \ldots, f^{(n)})$ et secundo $(g', g'', \ldots, g^{(n)})$, semper alius dabitur Canon $(m', m'', \ldots, m^{(n)})$ talis, ut unaquaeque quantitas $m^{(i)}$ minimae ipsarum $f^{(i)}$, $g^{(i)}$ aut aequalis aut ea minor sit.*

Unde sequitur hoc Corollarium:

Canon simplicissimus est unicus, sive unicum datur systema quantitatum l', l'', $\ldots$, $l^{(n)}$, quae Canonem simplicissimum suppeditant.

Sint quantitates $g^{(\alpha+1)}$, $g^{(\alpha+2)}$, $\ldots$, $g^{(n)}$ ipsis $f^{(\alpha+1)}$, $f^{(\alpha+2)}$, $\ldots$, $f^{(n)}$ respective majores, reliquae autem g', g'', $\ldots$, $g^{(\alpha)}$ ipsis f', f'', $\ldots$, $f^{(\alpha)}$ respective aut aequales aut minores. Vocemus respective $q_k^{(i)}$ et $r_k^{(i)}$ quantitates, quae primum et secundum Canonem constituunt, ubi generaliter fit

$$r_k^{(i)} = q_k^{(i)} + g^{(i)} - f^{(i)},$$

sitque rursus systema maximorum transversalium in primo Canone

$$q_1^{(i_1)}, \quad q_2^{(i_2)}, \quad \ldots, \quad q_n^{(i_n)},$$

ubi omnes i_1, i_2, $\ldots$, i_n inter se diversi sunt; in secundo Canone systema maximorum transversalium habetur etiam

$$r_1^{(i_1)}, \quad r_2^{(i_2)}, \quad \ldots, \quad r_n^{(i_n)}.$$

Nam omnia aggregata transversalia secundi Canonis ab aggregatis respondentibus primi eadem quantitate

$$g' + g'' + \cdots + g^{(n)} - \{f' + f'' + \cdots + f^{(n)}\}$$

differunt, unde, cum aggregatum

$$q_1^{(i_1)} + q_2^{(i_2)} + \cdots + q_n^{(i_n)}$$

maximum sit, etiam aggregatum

$$r_1^{(i_1)} + r_2^{(i_2)} + \cdots + r_n^{(i_n)}$$

maximum esse debet. At in quoque Canone secundum definitionem ejus stabilitam datur aggregatum transversale maximum, cujus singuli termini sint maximi inter omnes ejusdem verticalis, quibus maximis respective in prima, secunda, $\ldots$, n^{ta} verticali aequari debent termini

$$r_1^{(i_1)},\quad r_2^{(i_2)},\quad \ldots,\quad r_n^{(i_n)},$$

ut eorum aggregatum et ipsum constituere possit maximum. Unde cum i_1, $i_2, \ldots, i_n$ omnes inter se diversi sint, termini illi et ipsi systema maximorum transversalium constituunt, q. d. e.

Cum quantitates $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \ldots, g^{(n)}$ respective ipsis $f^{(\alpha+1)}, f^{(\alpha+2)}, \ldots, f^{(n)}$ majores sint, quantitates autem $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ omnes supponantur $= 0$ aut positivae, quantitates $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \ldots, g^{(n)}$ omnes sunt positivae. Jam observo, fieri non posse, ut in Canonis $(g', g'', \ldots, g^{(n)})$ serie $(\alpha+1)^{\text{ta}}$, $(\alpha+2)^{\text{ta}}, \ldots$ vel n^{ta} inveniatur maximum, cui aequalis existat terminus in eadem verticali positus, sed ad unam reliquarum serierum pertinens. Sit enim maximum illud in serie i_k^{ta}, terminus ei aequalis in serie i^{ta}, ut sit

$$r_k^{(i_k)} = r_k^{(i)},$$

ubi i est unus e numeris $1, 2, \ldots, \alpha$, atque i_k unus e numeris $\alpha+1, \alpha+2, \ldots, n$: erit e formula supra tradita

$$q_k^{(i_k)} + g^{(i_k)} - f^{(i_k)} = q_k^{(i)} + g^{(i)} - f^{(i)},$$

ubi secundum suppositionem factam $g^{(i_k)} - f^{(i_k)} > 0$ atque $g^{(i)} - f^{(i)} \leqq 0$. Unde

$$q_k^{(i_k)} < q_k^{(i)},$$

quod absurdum est, cum $q_k^{(i_k)}$ sit maximum inter omnes terminos ejusdem verticalis $q_k', q_k'', \ldots, q_k^{(n)}$. Hinc cum in secundo Canone maximo in $(\alpha+1)^{\text{ta}}$, $(\alpha+2)^{\text{ta}}, \ldots$ vel n^{ta} serie posito nullus aequalis esse possit terminus in eadem verticali in reliquis seriebus positus, quantitates $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \ldots, g^{(n)}$ omnes eadem quantitate decrescere possunt, reliquis immutatis manentibus, usque dum in aliqua serie $(\alpha+1)^{\text{ta}}$, $(\alpha+2)^{\text{ta}}, \ldots$ vel n^{ta} inveniatur maximum, quod non superet valorem alius termini in eadem verticali ad reliquas series pertinentis, aut dum una quantitatum $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \ldots, g^{(n)}$ evanescat. Qua diminutione nullum maximum neque igitur Canonis natura destruitur. Si hac ratione obtinetur

$$(g', g'', \ldots, g^{(\alpha)}, g_1^{(\alpha+1)}, g_1^{(\alpha+2)}, \ldots, g_1^{(n)})$$

atque inter quantitates $g_1^{(\alpha+1)}, g_1^{(\alpha+2)}, \ldots$ ipsae $g_1^{(\beta+1)}, g_1^{(\beta+2)}, \ldots$ adhuc quantitatibus $f^{(\beta+1)}, f^{(\beta+2)}, \ldots$ majores sunt, eadem methodo novus Canon obtinetur, in quo quantitates illae denuo diminutionem subierunt, sicque pergere licet, usque dum perveniatur ad Canonem

$$(m', m'', \ldots, m^{(\alpha)}, m^{(\alpha+1)}, m^{(\alpha+2)}, \ldots, m^{(n)}),$$

ubi quantitates uncis inclusae omnes quantitatibus respondentibus ipsarum f', $f'', \ldots, f^{(n)}$ et $g', g'', \ldots, g^{(n)}$ aut minores aut iis aequales sunt, q. d. e.

Sequitur e Theoremate IV

Theorema V. *Nullus datur Canon, pro quo aliqua quantitatum l', l'', ..., $l^{(n)}$ valorem minorem induat quam pro Canone simplicissimo.*

Scilicet si talis daretur Canon, per methodum antecedentem obtineri posset alius, pro quo una certe quantitatum l', l'', ..., $l^{(n)}$ valorem minorem indueret quam pro Canone simplicissimo, reliquae autem valores non majores, quod est contra Canonis simplicissimi definitionem. Cum valor minimus, quem quantitates l', l'', ..., $l^{(n)}$ obtinere possint, sit $=0$, e Propositione V sequitur tanquam Corollarium

Theorema VI. *Series, quae in Canone quocunque habetur immutata, eadem in Canone simplicissimo inveniatur necesse est.*

Ut cognoscatur, utrum Canon aliquis sit simplicissimus necne, adhiberi potest haec Propositio:

Theorema VII. *Proposito Canone atque in eo maximorum transversalium systemate electo, notentur primum series immutatae A, deinde series B, quarum maximis aequantur termini in eadem verticali ad series A pertinentes; deinde series C, quarum maximis aequantur termini in eadem verticali ad series B pertinentes et ita porro. Si hac ratione pergendo exhaurire licet omnes Canonis series, Canon erit simplicissimus.*

Pertineant quantitates l', l'', ..., $l^{(n)}$ ad Canonem propositum, quantitates l'_1, l''_1, ..., $l^{(n)}_1$ autem ad alterum Canonem. Consideremus idem maximorum transversalium systema atque in Theoremate proposito electum supponitur, cui etiam in altero Canone respondebit maximorum transversalium systema.

Sit $l^{(\gamma)}_1 < l^{(\gamma)}$, seriei γ^{tae} maximum in altero Canone gaudebit minore valore quam in Canone proposito. Pertineat series γ^{ta} ad complexum C, ita ut in Canone proposito maximo seriei γ^{tae} aequetur terminus alicujus seriei β^{tae} ad complexum B pertinentis, fieri etiam debet $l^{(\beta)}_1 < l^{(\beta)}$. Vocando enim propositi Canonis terminos $p^{(i)}_k$, alterius $q^{(i)}_k$, erit

$$q^{(\beta)}_k = p^{(\beta)}_k + l^{(\beta)}_1 - l^{(\beta)},$$

unde, si $p^{(\gamma)}_k = p^{(\beta)}_k$ est maximum seriei γ^{tae}, erit

$$q^{(\beta)}_k = p^{(\gamma)}_k + l^{(\beta)}_1 - l^{(\beta)} = q^{(\gamma)}_k + l^{(\beta)}_1 - l^{(\beta)} - \{l^{(\gamma)}_1 - l^{(\gamma)}\}.$$

Unde, cum sit $q^{(\gamma)}_k$ maximum in k^{ta} verticali ideoque $q^{(\gamma)}_k \geqq q^{(\beta)}_k$ atque $l^{(\gamma)}_1 < l^{(\gamma)}$, fieri debet $l^{(\beta)}_1 < l^{(\beta)}$.

Porro in Canone proposito aequatur maximo seriei β^{tae} terminus seriei α^{tae} ad complexum A pertinentis, atque eodem modo demonstratur, fieri $l^{(\alpha)}_1 < l^{(\alpha)}$, quod absurdum est, quia secundum suppositionem factam $l^{(\alpha)} = 0$ est atque ipsae $l_1', l_1'', \ldots, l_1^{(n)}$ aut evanescentes aut positivae sunt. Eodem modo procedit reductio ad absurdum, ad quemcunque complexum A, B, C, D, ... pertineat series $\gamma^{(a)}$, cui respondet in altero Canone quantitas $l_1^{(\gamma)}$ minor quam in proposito $l^{(\gamma)}$. Unde si Canon ita constitutus est atque in VII supponitur, pro nullo alio quantitates l valores induere possunt inferiores quam in proposito; sive Canon propositus est simplicissimus.

Antecedentia solutionem quoque continent problematis, *dato Canone quocunque, invenire simplicissimum.* Supponere licet, in dato Canone unam ad minimum esse seriem immutatam; quae, nisi jam invenitur, obtineri potest ipsas l omnes eadem quantitate diminuendo. Ut in Theoremate VII serierum immutatarum complexum vocemus A atque complexus ibidem definitos B, C, ... formemus. Hac ratione pergendo si omnes series exhauriuntur, Canon secundum VII jam ipse est simplicissimus. Ponamus autem relinqui, series non praeditas talibus *maximis,* quibus aequentur termini ejusdem verticalis ad complexus formatos pertinentes. Tum reliquarum serierum termini (vel quantitates l ad eas series pertinentes) omnes eadem quantitate diminuantur, usque dum earum quantitatum l una evanescat aut earum serierum *maximum* aliquod eo decreverit, ut ei aequalis terminus in eadem verticali ad complexus formatos pertinens inveniatur. Quo facto novus eruitur Canon, in quo auctus est numerus serierum pertinentium ad complexus regula indicata formatos. Si jam omnes series in complexus illos ineunt, Canon erutus erit simplicissimus. Si non, novus novusque Canon eadem methodo eruendus est, semperque pauciores a complexibus, qui formari possunt, relinquuntur series, unde tandem pervenietur ad Canonem, in quo complexus, qui formari possunt, series omnes exhauriunt, qui Canon est simplicissimus quaesitus.

Exemplum.

Schema propositum.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	7	7	4	15	14	6	1
II	3	8	7	6	11	14	10
III	6	11	15	16	15	23	10
IV	4	11	14	25	20	21	27
V	5	2	8	10	23	18	30
VI	1	8	3	9	6	20	17
VII	11	12	8	22	24	21	40

Canon propositus.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	12*	12	9	20	19	11	6	5
II	11	16*	15	14	19	22	18	8
III	9	14	18*	19	18	26	13	3
IV	5	12	15	26*	21	22	28	1
V	10	7	13	15	28*	23	35	5
VI	7	14	9	15	12	26*	23	6
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon derivatus I.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	10	15*	14	13	18	21	17	7
III	8	13	17*	18	17	25	12	2
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	9	6	12	14	27*	22	34	4
VI	6	13	8	14	11	25*	22	5
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon derivatus II.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	8	13*	12	11	16	19	15	5
III	6	11	15*	16	15	23	10	0
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	7	4	10	12	25*	20	32	2
VI	4	11	6	12	9	23*	20	3
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon simplicissimus.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	7	12*	11	10	15	18	14	4
III	6	11	15*	16	15	23	10	0
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	6	3	9	11	24*	19	31	1
VI	4	11	6	12	9	23*	20	3
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

E schemate proposito, addendo terminis serierum diversarum respective numeros 5, 8, 3, 1, 5, 6, 0, aliud obtinetur schema, in quo termini inter omnes ejusdem verticalis maximi in diversis seriebus horizontalibus sunt, quae est Canonis proprietas characteristica.

Proponitur Canonem simplicissimum investigare. Constituit in dato Canone series VII complexum A. De reliquarum serierum terminis detraho unitatem, prodit Canon derivatus I.

In Canone derivato I series IV et VII constituunt complexum A, series I complexum B. De reliquarum terminis detraho 2, prodit Canon derivatus II.

In Canone derivato II series III, IV, VII constituunt complexum A, series I et VI complexum B; detrahendo de secunda et quinta serie unitatem, prodit Canon ultimus seu simplicissimus, cui respondet ipsarum l valores 4, 4, 0, 0, 1, 3, 0. Quos addendo terminis serierum diversarum schematis propositi, prodit Canon simplicissimus. Series III, IV, VII complexum A, series I, II, V, VI complexum B constituunt; quos complexus series omnes exhaurire videmus, quae est Canonis simplicissimi proprietas characteristica. —

Si non datur Canon aliquis, sed tantum schematis propositi termini, qui aggregatum maximum transversale constituunt, ad Canonem simplicissimum pervenitur, cuique seriei minimam addendo quantitatem, qua efficitur, ut datus ejus terminus ad aggregatum transversale maximum pertinens fiat in sua verticali maximo aequalis. Quo negotio ad omnes series adhibito et, si opus est, repetito, tandem ad Canonem perveniri debet, qui erit simplicissimus, cum incrementa seriebus non majora addita sint, quam necessario postulatur, ut termini dati, in sua quisque verticali, maximi fiant.

Exemplum.

Schema propositum.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	11*	7	6	4	6	4	11
II	11	12*	11	11	3	11	12
III	8	11	15*	14	9	6	8
IV	19	10	16	25*	11	12	22
V	18	15	15	20	24*	9	24
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Schema derivatum.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	19*	15	14	12	14	12	19
II	17	18*	17	17	9	17	18
III	16	19	23*	22	17	14	16
IV	21	12	18	27*	13	14	24
V	25	22	22	27	31*	16	31
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Canon simplicissimus.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	25*	21	20	18	20	18	25
II	21	22*	21	21	13	21	22
III	16	19	23*	22	17	14	16
IV	21	12	18	27*	13	14	24
V	25	22	22	27	31*	16	31
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Termini asteriscis notati aggregatum transversale maximum formant, scilicet sumpsi schema propositum e Canone praecedente, seriebus horizontalibus in verticales, verticalibus in horizontales conversis; quo facto manent termini aggregatum transversale maximum constituentes iidem, schema autem desinit esse Canon.

Seriebus

$$\text{I},\ \text{II},\ \text{III},\ \text{IV},\ \text{V}$$

addo respective secundum datam regulam

$$8,\ 6,\ 8,\ 2,\ 7,$$

prodit schema derivatum.

Seriebus

$$\text{I},\ \text{II}$$

addo respective

$$6,\ 4,$$

prodit Canon simplicissimus quaesitus, in quo series III, IV, V, VI, VII immutatae manent atque in schemate derivato. In Canone eruto constituunt series VI, VII complexum A, series III, IV, V complexum B, series I, II complexum C, qui complexus cum omnes series amplectantur, indicium obtinuimus, Canonem esse simplicissimum. —

Cum dato Canone etiam innotescat schematis propositi aggregatum transversale maximum, ad problema antecedentibus solutum revocari potest alterum problema, *dato Canone quocunque, investigare simplicissimum.* Cujus igitur duplex habetur solutio, altera per subtractiones successivas, uti supra, altera per additiones successivas procedens, uti fit, si e dato Canone petimus schematis propositi aggregatum transversale maximum eoque cognito methodum antecedentem applicamus.

3.

Solutio problematis inaequalitatum in paragrapho praecedente tractati terminatur. Proposito schemate, invenitur Canon.

Restat, ut demonstretur, quomodo Canon aliquis investigari possit; quippe quocunque invento, vidimus variis modis erui simplicissimum. Proponamus igitur sequens inaequalitatum problema, quod pro principali haberi debet.

Problema.

Datis nn quantitatibus $h_k^{(i)}$, ubi indicibus i et k valores 1, 2, ..., n *conveniunt, invenire tales n quantitates minimas positivas*

$$l',\ l'',\ \ldots,\ l^{(n)},$$

ut, posito

$$h_k^{(i)}+l^{(i)} = p_k^{(i)},$$

atque pro singulis k electo maximo inter terminos

$$p'_k,\ p''_k,\ \dots,\ p^{(n)}_k,$$

quod sit

$$p^{(i_k)}_k,$$

indices

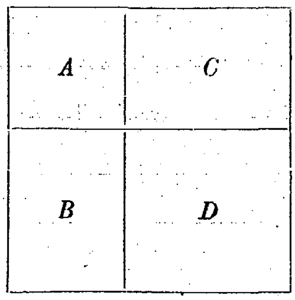
$$i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_n$$

omnes inter se diversi sint.

Solutio.

Prima et quasi praeparatoria operatio eo consistit, ut, si in schemate proposito habentur series, in quibus nulla inveniantur *maxima*, earum quaeque minima quantitate augeatur, qua fit, ut unus ejus terminus aequalis evadat *maximo* in eadem verticali posito. Sic obtinetur novum schema, quod *schema praeparatum* voco et in quo quaeque series uno pluribusve maximis gaudet. Diversarum schematis praeparati serierum maxima omnia ad diversas verticales pertineant non necesse est. Sed ad minimum *duarum* serierum maxima habentur, quae ad *duas* verticales pertinent, in quem casum extremum non incidimus, nisi omnia maxima in una eademque serie jacent atque insuper in una eademque verticali termini omnes inter se aequales sunt; quod si secus fit, maximorum transversalium numerus semper est >2. Si $n=2$, prima illa operatione problema absolvitur.

In schemate praeparato quaero maximum numerum maximorum transversalium, quorum systema ubi pluribus modis eligi potest, sufficit unum certum eorum systema considerare. Quo electo, solutionem problematis propositi ita adorno, ut numerus maximorum transversalium successive augeatur, usque dum eruatur schema systemate completo n maximorum transversalium praeditum, qui erit Canon quaesitus. Sufficit igitur demonstrare, idoneis serierum augmentationibus numerum maximorum transversalium unitate augeri posse.



Divido schema praeparatum in quatuor spatia A, B, C, D sicuti in figura apposita. Ponamus, maxima transversalia electa omnia esse in spatio A, ita ut series, in quibus maxima illa sunt, occupent spatia A et C; verticales autem, ad quas pertinent, spatia A et B. Series spatia A et C occupantes voco *superiores*, spatia B et D occupantes *inferiores*. Porro verticales spatia A et B occupantes voco *laevas*, spatia C et D occupantes *dextras*. Jam in spatio D nullum invenitur maximum. Alioquin enim numerus maximorum transversalium augeretur contra hypothesin, maximum numerum maximorum transversalium electum esse. Unde verticales dextrae sua habent maxima in C; termini autem serierum inferiorum in suis verticalibus maximi erunt in B, et eorum quisque aequatur maximo in eadem verticali in A posito, quum in spatio A sint maxima omnium verticalium laevarum, aeque ac serierum omnium superiorum.

His positis, series omnes in tres Classes distribuo, quae sic eruuntur.

Eligo eas serierum superiorum, quae praeter maxima in A alio vel aliis in C positis gaudent, cujusmodi serierum una saltem exstat. Ponamus, alicuius illarum serierum maximo in A posito aequari alium terminum in eadem verticali; quaeratur maximum in eadem serie cum hoc termino positum, et si huic rursus aequatur alius terminus in eadem verticali, rursus quaeratur maximum cum hoc termino in eadem serie positum et sic porro. Omnes series, ad quas hac ratione perveniri potest, junctae seriebus, a quibus proficiscendum erat, constituunt *Classem Primam*.

Dico, inter series Primae Classis nullam inveniri seriem inferiorem, neque igitur ullam seriem superiorem, a qua per methodum indicatam ad seriem inferiorem pervenire liceat. Scilicet proficiscendo a serie, quae praeter maximum in A alio in C gaudet, consideremus systema maximorum in A positorum, ad quae methodo indicata perveniatur; quorum ultimo, si fieri potest, aequetur terminus ejusdem verticalis in B positus. Maxima illa in A posita omnia secundum suppositionem sunt transversalia, quorum in locum aliud obtinebitur systema maximorum transversalium, si cuique substituitur ejusdem verticalis terminus aequalis. Qua in re ultimo maximo substituitur terminus in B positus, prima autem series, a qua profecti sumus, non amplius adhibetur. Unde novo maximorum systemati jungendo hujus seriei *maximum* in C positum, numerus maximorum transversalium unitate augetur, id quod contradicit suppositioni, maximum numerum maximorum transversalium electum fuisse. Scilicet seriebus superioribus accederet inferior, in qua est terminus ultimo maximo aequalis, verticalibus autem laevis accederet dextra, in qua est maximum aliquod seriei, a qua profecti sumus.

Ad *Classem Secundam* pertinent series superiores, quae non ad Primam Classem pertinent et a quibus nec ipsis methodo indicata ad seriem inferiorem transitus datur. Fieri potest, ut haec Classis omnino non existat.

Ad *Classem Tertiam* denique pertinent series inferiores omnes eaeque superiores, a quibus methodo tradita ad series inferiores transitus datur. *Unde, si terminus seriei inferioris aequatur maximo seriei superioris in eadem verticali — quod semper fit —, ea series superior ad Classem Tertiam pertinebit.* Tertia classis, nisi schema jam ipse Canon est, duabus saltem seriebus, una inferiore, una superiore constat.

Id, quod supra de Classe Prima demonstravi, jam ita enuntio, ut dicam, *inter series superiores Tertiae Classis nullam inveniri seriem, quae maximo in C posito gaudeat.* Qua Propositionis forma postea utar.

Observationes hac occasione factae simul praebent methodum exhibendi maximum numerum maximorum transversalium in schemate praeparato. Etenim posito maximorum transversalium systemate, quod primum se offert, ipsa classificatio serierum indicat, si eorum numerus augeri potest.

Facta classificatione antecedentibus praescripta, *tota Classis Tertia eadem quantitate augeatur, eaque minima, qua efficitur, ut unus serierum ejus Classis terminus aequalis evadat termino maximo alicui ejusdem verticalis ad seriem Secundae aut Primae Classis pertinenti.*

Quod si ad Primam Classem pertinet maximum, numerus maximorum transversalium augeri potest. Dabitur enim series superior, quae praeter maximum in A alio in C gaudet, et a qua via indicata ad seriem aliquam inferiorem transitus datur. Quae series adjicienda est serierum superiorum numero, dum verticalium laevarum numerus ea augendus est verticali dextra, in qua maximum illud in C positum invenitur. Si jacet in D terminus ille seriei Tertiae Classis maximo seriei Primae Classis aequalis, maxima transversalia immutata manent, eo tantum accedente termino. Si vero terminus ille jacet in B, omnia mutanda erunt maxima formantia catenam illam, qua ad seriem inferiorem descendebatur a serie praedita maximo in C posito. Scilicet cuique illorum maximorum transversalium substituendus est terminus ejusdem verticalis ei aequalis, ultimo igitur terminus ille in B, novis maximis transversalibus sic erutis accedente insuper maximo primae seriei in C posito, sicuti ad Primam Classem adnotavi.

Si maximum, cui aequatur terminus Tertiae Classis, in serie Secundae Classis est, nihil mutatur, nisi quod haec series ad Tertiam Classem transmigrat simulque reliquae omnes Secundae Classis, a quibus per catenam indicatam ad illam seriem transitus datur. Repetita operatione rursus aut augebitur numerus maximorum transversalium, aut certe numerus serierum Secundae Classis minuitur, unde tandem, nisi antea numerus maximorum transversalium auctus est, ad schema pervenimus seriebus Secundae Classis destitutum, quippe quae omnes ad Tertiam Classem transmigraverunt. Tum autem operatione praescripta certo obtinemus maximorum transversalium augmentationem. Quam si assecuti sumus, pro variis casibus, qui locum habere possunt et quos enumerare longum esset, nova facienda est maximorum transversalium distributio in tres Classes assignatas, quo facto eadem repetenda erit operatio, usque dum ad Canonem pervenimus, in quo series inferiores omnes ad superiores, verticales dextrae ad laevas transmigraverunt.

At per methodum antecedentibus traditam non solum Canonem, sed Canonem simplicissimum eruimus. Quod ut pateat, demonstrabo, quantitates, quibus augentur series, esse minimas, quae poscuntur, ut omnino Canon prodeat. Ac primum, quod operationem praeparatoriam attinet, observo, Canonis terminos terminis respondentibus dati schematis aut superiores esse aut iis aequales, cum e dato schemate propositum sit Canonem eruere addendo singulis seriebus tantum quantitates positivas aut evanescentes. Unde in quaque Canonis verticali maximum aut superat aut aequat maximum in eadem verticali dati schematis. In Canone autem invenitur in quaque serie maximum, ideoque terminus aliquis, qui maximum in eadem verticali dati schematis aut superat aut aequat, unde quamque dati schematis seriem maximo destitutam tali augere debemus quantitate, ut unus ejus terminus maximum ejusdem verticalis superet aut aequet. Quodsi igitur quantitates notamus, quibus singuli seriei termini differunt a maximis in eadem verticali, quantitas, qua series augenda est, non minor esse debet quam illarum quantitatum minima. Unde quamque seriem maximo destitutam augendo quantitate minima, qua unus ejus terminus aequalis efficitur maximo ejusdem verticalis, certe series illas non majoribus auximus quantitatibus, quam ad Canonem formandum flagitatur.

Post praeparationem factam si jam ipse Canon prodit, certo ille est simplicissimns; vidimus enim schematis propositi seriebus minimas quantitates positivas additas esse, quibus fieri possit, ut omnino Canon prodeat. Si vero nondum Canon prodiit, procedendum erat ad serierum distributionem in tres Classes assignatas. Jam demonstrabo, ad Canonem eruendum *fieri non posse, ut aliqua serierum Tertiae Classis immutata maneat.*

In demonstratione vocabo S schema praeparatum, K Canonem erutum. Semper suppono, quod jam ad classificationem serierum poscebatur, in S certum maximorum transversalium systema in spatio A ante oculos haberi, ita ut, si plura ejusmodi dantur systemata in spatio A, unum aliquod ex iis eligendum sit. Similiter in K suppono, si plura maximorum transversalium systemata dantur, unum certum eligi.

Consideremus in S cunctas series superiores Tertiae Classis *immutatas*, si quae dantur, sive eas, quibus nulla quantitas additur Canone K formando seu quae in S et K eaedem sunt. Vocemus harum serierum complexum H earumque consideremus maxima transversalia in S et K electa. *Dico, horum maximorum systema in S atque K in iisdem verticalibus fore.* Sit enim M unum horum maximorum in K, in serie immutata positum; cui respondet in S terminus aequalis ejusdem seriei et ipse in sua verticali maximus. Nam cum a S ad K per additiones positivas perveniatur, cujusque verticalis termini in S inferiores aut aequales sunt respondentibus in K; unde, si eorum maximo in K aequatur ejusdem verticalis terminus in S, is a fortiori inter ejusdem verticalis terminis in S maximus esse debet. Terminus M exstare debet in spatio A, cum series superior Tertiae Classis secundum proprietates Classium stabilitas non habeat terminos in sua verticali maximos in C positos. Vocemus V complexum verticalium, in quibus sunt serierum H maxima in S, atque ponamus, verticalem, in qua sit M, non pertinere ad verticales V. Exstabit in S in illa verticali maximum $N = M$ ad maxima transversalia in spatio A electa pertinens, quare maximum N in serie erit positum, quae non pertinet ad series H. Nam ipsarum H maxima transversalia electa in verticalibus V jacent, ipsum N autem in verticali supponitur, quae ad verticales V non pertinet. Haec nova series et ipsa superior esse debet ad Tertiam Classem pertinens; nam maximum N in spatio A jacet, et e definitione Classium tradita sequitur, si in eadem verticali sumuntur omnes termini maximi inter se aequales, series, in quibus positi sint, ad eandem Classem pertinere. Jam si ad Canonem K formandum illi seriei quantitas non evanescens addenda esset, terminus ipsi N in K respondens evaderet major ipso N ideoque etiam major termino M in eadem verticali posito, quod fieri non potest, cum sit M in sua verticali maximum. Unde series illa ipsa immutata esse debet, quod tamen absurdum est, quia suppositum est, series H *cunctas* esse series Tertiae Classis immutatas. Unde ipsum M necessario in una verticalium V jacet; quod cum de quoque maximorum M valeat, sequitur, systema maximorum transversalium serierum H in K electorum in iisdem verticalibus esse atque systema maximorum transversalium earundem serierum H in S electorum, q. d. e.

Si sumuntur in S termini respondentes et aequales maximis serierum H in K, formabunt illi in S alterum systema terminorum maximorum transversalium, qui cum maximis serierum H in iisdem seriebus horizontalibus et verticalibus sunt. Id quod fieri non potest, nisi utriusque systematis termini in eadem verticali positi inter se aequales sunt. Unde eruitur hoc Corollarium: *si in S in serie superiore Tertiae Classis immutata sumatur maximum, in eadem verticali haberi in K seriei alicujus superioris ejusdem classis maximum illi aequale.* Maxima autem in S ut in K semper suppono e systemate electo maximorum transversalium sumi.

Ceterum eadem ratione demonstratur Propositio antecedens, si H designat complexum serierum Secundae Classis immutatarum; immo pro iis tantum Propositio vi aliqua et significatione gaudet. Etenim Tertiae Classis omnino non existunt series immutatae.

Primum patet, *non dari series inferiores immutatas.* Si enim exstat series inferior immutata, sit M ejus maximum in K e systemate maximorum transversalium electorum; idem terminus in S erit maximus inter omnes ejusdem verticalis ideoque aequivalet maximo seriei alicujus superioris Tertiae Classis in eadem verticali posito et ad maxima transversalia pertinenti*). At secundum Corollarium antecedens in eadem verticali esse debet in K seriei alicujus superioris maximum ad maxima transversalia pertinens, unde in K haberentur duo maxima transversalia in eadem verticali, alterum in serie superiore, alterum M in inferiore, id quod maximorum transversalium notioni contrarium est.

Demonstrabo jam, *si series Tertiae Classis superior exstet immutata, etiam haberi inferiorem immutatam,* quod cum fieri non possit, probatum erit, neque superiorem neque inferiorem seriem Tertiae Classis dari immutatam.

Ponamus, dari seriem superiorem Tertiae Classis immutatam, quam per s designo. Secundum definitionem Tertiae Classis, si s est series superior Tertiae Classis, dabuntur series s, s_1, s_2, $\ldots$, s_{m-1} tales, ut earum maxima M, M_1, M_2, $\ldots$, M_{m-1}, quae e systemate maximorum transversalium electo sumenda sunt, habeant quodque in eadem verticali terminum aequalem N_i in serie subsequente, ultimo vero M_{m-1} aequetur in eadem verticali terminus N_{m-1} seriei inferioris, ut igitur bini N_i et M_{i+1} sint in eadem serie, bini inter se aequales M_i et N_i in eadem verticali. Jam si series superior Tertiae Classis

*) Vide supra Tertiae Classis definitionem p. 209, 210.

s est immutata, secundum Corollarium antecedens dabitur in K maximum ipsi M aequale et in eadem verticali positum; unde ad Canonem formandum non augeri poterit series s_1, alioquin enim augeretur terminus N ipsoque maximo M in eadem verticali posito major evaderet. Unde series s_1 et ipsa immutata esse debet, similiterque probatur, omnes quoque $s_2, s_3, \ldots, s_{m-1}$ nec non seriem inferiorem s_m immutatam fore, quod fieri non posse vidimus.

Cum ad Canonem formandum nulla series Tertiae Classis immutata manere possit, sit f minima quantitatum, quibus illae series augeri debent, ita ut, omnibus quantitate f auctis, in novo schemate certe una earum exstet, quae ad Canonem formandum non amplius augenda sit, sed *immutata* maneat. Sit g quantitas minima, qua ipsius S series Tertiae Classis augentur, ut unus earum terminus aequetur ejusdem verticalis maximo in serie Secundae aut Primae Classis posito. Si $f' < g$ atque omnes series Tertiae Classis quantitate f' augentur, in novo schemate videmus, distributionem serierum in Classes non alterari, sed quamque ad eandem pertinere Classem atque in S. Unde non poterit fieri $f < g$; alioquin enim haberetur schema, in quo daretur series aliqua Tertiae Classis immutata, quod fieri non potest. Hinc videmus, quantitatem minimam, qua series Tertiae Classis augendae sint, ut unus earum terminus aequetur ejusdem verticalis maximo in serie Primae aut Secundae Classis posito, aequalem aut inferiorem esse quantitate minima earum, quibus series Tertiae Classis ad Canonem formandum augeri debent. Unde sequitur regula tradita, nunquam majores adhiberi additiones, quam ad Canonem quemcunque formandum necessarium sit, ideoque *Canonem regula nostra erutum fieri simplicissimum.*

Exemplum.

Schema propositum.

11	7	6	4	6	4	11
11	12	11	11	3	11	12
8	11	15	14	9	6	8
19	10	16	25	11	12	22
18	15	15	20	24	9	24
10	18	23	21	19	23	21
5	14	10	27	31	20	40

Schema praeparatum.

$\underline{19}^*$	15	14	12	14	12	19	t
17	$\underline{18}^*$	17	17	9	17	18	t
15	$\underline{18}$	22	21	16	13	15	t
$\underline{19}$	10	16	25	11	12	22	t
$\underline{19}$	16	16	21	25	10	25	t
10	$\underline{18}$	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21	
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$	

Schema derivatum I.

$\underline{20}^*$	16	15	13	15	13	20	t
18	$\underline{19}^*$	18	18	10	18	19	
16	$\underline{19}$	$\underline{23}^*$	22	17	14	16	
$\underline{20}$	11	17	26	12	13	23	t
$\underline{20}$	17	17	22	26	11	26	t
10	18	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21	
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$	

Schema derivatum II.

$\underline{21}^*$	17	16	14	16	14	21	t
18	$\underline{19}^*$	18	18	10	18	19	
16	$\underline{19}$	$\underline{23}^*$	22	17	14	16	
$\underline{21}$	12	18	$\underline{27}^*$	13	14	24	
$\underline{21}$	18	18	23	27	12	27	t
10	18	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21	
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$	

Schema derivatum III.

$\underline{22}^*$	18	17	15	17	15	22	t
18	$\underline{19}^*$	18	18	10	18	19	t
16	$\underline{19}$	$\underline{23}^*$	22	17	14	16	
21	12	18	$\underline{27}^*$	13	14	24	
$\underline{22}$	$\underline{19}$	19	24	28	13	28	t
10	18	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21	
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$	

Canon simplicissimus.

$\underline{25}^*$	21	20	18	20	18	25
21	$\underline{22}^*$	21	21	13	21	22
16	19	$\underline{23}^*$	22	17	14	16
21	12	18	$\underline{27}^*$	13	14	24
$\underline{25}$	$\underline{22}$	22	$\underline{27}$	$\underline{31}^*$	16	31
10	18	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$

In schemate proposito tres primae series et quinta terminis maximis carent. Quibus seriebus respective additi sunt numeri minimi 8, 6, 7, 1, quibus fieri potuit, ut unus earum terminus evaderet maximus. In schemate sic praeparato in quaque verticali terminos maximos omnes sublineavi, insuper maxima transversalia electa stellavi (asterisco notavi). Deinde juxta scripto t denotavi series Tertiae Classis, quae sic inveniuntur. Primum enim ad eas pertinent omnes series α, quae carent termino stellato, quas supra inferiores appellavi; deinde series β, quae terminum stellatum habent in eadem verticali, in qua et aliquis serierum α terminus sublineatur; series β si praeter terminos stellatos alios habent sublineatos, in iisdem verticalibus quaeruntur novi termini stellati, qui ad series γ pertinent, et ita porro: omnes series α, β, γ etc. facillime inventae formabunt Tertiam Classem. Patet autem, ad regulam exsequendam tantum postulari, ut series Tertiae Classis cognoscantur, neque distributione in Primam et Secundam Classem opus esse. Regula enim nihil poscit, nisi ut series Tertiae Classis omnes simul quantitate minima augeantur, qua fit, ut earum terminus unus aequetur reliquarum serierum termino maximo alicui stellato in eadem verticali posito. Totum igitur negotium consistit in hac augmentatione serierum, electione maximorum transversalium atque distributione serierum Tertiae Classis post quamque augmentationem denuo efficienda. Id quod continuandum est, usque dum series Tertiae Classis non amplius inveniuntur, quo casu ad Canonem simplicissimum pervenimus.

Schematis totius post quamque mutationem denuo scribendi negotium variis artificiis expediri potest. Scilicet, ut a schemate aliquo ad proximum transeamus, non opus est, ut alios terminos ante oculos habeamus, quam qui in quaque verticali maximi sunt et maximis proxime inferiores, unde hos scribere sufficit. Porro cum serierum ordo non respiciendus sit, sufficit series tantum augendas delere et auctas infra reliquas scribere, quae non mutantur. Sed haec et alia, quae commode in magna numerorum mole adhibentur, melius cujusque genio relinquuntur.