MAXIMUM-MINIMUM SÄTZE ÜBER GRAPHEN

Von

T. GALLAI (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Einleitung

Im folgenden behandeln wir in vereinfachter Weise die Ergebnisse einer kürzlich in ungarischer Sprache erschienenen Arbeit ([9], [10]). Wir beweisen mehrere, dem Mengerschen „n-Kettensatz" ([14], S. 222) ähnliche „Maximum-Minimum" Sätze. EGERVÁRY verallgemeinerte (in matrizentheoretischer Formulierung) den auf paare Graphen bezüglichen Spezialfall des Mengerschen Satzes in solcher Weise, daß er die Kanten der Graphen mit Zahlen bewertete und statt des Maximums der Kantenanzahlen gewisser Kantenmengen das Maximum der Wertsummen der betrachteten Kantenmengen nahm ([3], S. 17, I). Den allgemeinen Mengerschen Satz kann man nicht in der gleichen Richtung ausdehnen. Es gelingt aber, einen der Egerváryschen Verallgemeinerung ähnlichen Satz dadurch zu finden, daß man statt ungerichteter Graphen gerichtete, statt Wege gerichtete Kreise nimmt. In gleicher Weise kann man aus dem „max-flow min-cut" Satz ([1], [5], [6], [7]), der den Mengerschen Satz als Spezialfall enthält, mehrere der Egerváryschen Verallgemeinerung entsprechende Sätze herleiten (Sätze (2. 1. 6), (3. 1. 4), (3. 2. 3), (3. 2. 6)). Wir werden jedem dieser Sätze je einen „dualen" Satz zur Seite stellen (Sätze (2. 1. 7), (3. 1. 5), (3. 2. 4), (3. 2. 7)). Durch Anwendung der erhaltenen Sätze auf besondere Graphen bzw. Bewertungen gelangen wir zu weiteren Maximum-Minimum Sätzen (Sätze (4. 2. 3), (4. 2. 5), (4. 2. 7), (4. 2. 9), (4. 3. 1), (4. 3. 3), (4. 3. 5), (4. 4. 12), (4. 4. 13)), die sich auf Wege bzw. auf Kanten beziehen, und die als Spezialfall den „max-flow min-cut" Satz, den erwähnten Egerváryschen Satz und einen von DILWORTH stammenden, auf halbgeordnete Mengen bezüglichen Satz ([2], S. 161, 1. 1) enthalten.

Es ist bemerkenswert, daß in den Sätzen die Ganzwertigkeit der Bewertung die Ganzwertigkeit der anderen auftretenden Zahlenwerte nach sich zieht. Wir werden unsere Sätze erst unter Berücksichtigung der Ganzwertigkeit ableiten und nur nachträglich zeigen, daß sie auch mit nicht ganzzahligen Bewertungen in Kraft bleiben (Abschnitt 2. 5).

Man kann unsere Sätze auch auf unendliche Graphen ausdehnen. Das zeigen wir in Bezug auf Satz (2. 1. 6) (Abschnitt 2. 6).

Als Anwendung beweisen wir zwei Sätze bezüglich Faktoren (Sätze (5. 1. 2), (5. 2. 2)), und wir leiten aus diesen einen Satz von ORE ([15], S. 405, Theorem 2. 3. 2), sowie einen Satz von TUTTE ([16], S. 930) ab.

Unser Beweisverfahren stammt aus der in [8] angewendeten Methode. Man kann dieses Verfahren sowohl auf die Sätze (2. 1. 6), (2. 1. 7), als auch auf die Sätze (3. 2. 6), (3. 2. 7) anwenden, doch sind die Beweise der erstgenannten Sätze viel einfacher (siehe [9] und [10]). Glücklicherweise lassen sich jedoch mit einem durch FORD und FULKERSON ersonnenen Verfahren ([6], S. 212) aus (2. 1. 6) und (2. 1. 7) die Sätze (3. 2. 6) und (3. 2. 7) leicht herleiten (Abschnitt 3. 2).

Zuletzt zeigen wir, daß die Sätze (2. 1. 6) und (2. 1. 7) auch mit Hilfe des Dualitätssatzes der Theorie der linearen Programmierung (s. [11], S. 58—65) ableitbar sind (§ 6).

§ 1

1. 1. Grundbegriffe

Betrachten wir zwei nichtleere Mengen Φ und Ψ. Es sei Φ die Menge der *Knotenpunkte* — im folgenden einfach nur *Punkte* — Ψ die Menge der *gerichteten Kanten.* Wir bezeichnen einen beliebigen Punkt mit X, eine beliebige Kante mit x. Auch die mit Indizes versehenen Buchstaben X und x sollen Punkte bzw. Kanten bedeuten. Der *gerichtete Graph* Γ ist dann gegeben, wenn es vorgeschrieben ist, welche Punkte und Kanten zueinander *inzident* sind. Wir geben die Inzidenzen in folgender Form an: Man ordnet zu jedem Paar der Elemente x und X eine Zahl (x, X) mit folgenden Eigenschaften zu:

(1) es gebe zu jedem x ein X' und ein X'' mit

$$(x, X') = -\frac{1}{2}, \quad (x, X'') = \frac{1}{2}, \quad (x, X) = 0, \quad \text{falls} \quad X \neq X', X'';$$

(2) es gebe zu jedem X ein x mit $(x, X) \neq 0$.

Die in (1) auftretenden Punkte X' und X'' heißen die *Randpunkte* der Kante x, X' ist der *Anfangspunkt,* X'' der *Endpunkt.* Wir werden die Behauptung, daß X' der Anfangspunkt, X'' der Endpunkt der Kante x ist, kurz mit der Gleichung $x = x(X' X'')$ ausdrücken. Auch die folgenden Ausdrucksweisen werden wir benützen: die Kante *läuft* von ihrem Anfangspunkt *aus, läuft* in ihren Endpunkt *ein, ist* zu jedem ihrer Randpunkte *inzident.*

Die Bestimmung eines *ungerichteten* Graphen unterscheidet sich von der vorausgehenden Definition nur darin, daß die Funktion (x, X), welche die Inzidenzen angibt, für eine jede Kante und für die beiden zu der Kante gehörigen Randpunkte den Wert 1/2 annimmt.

Im folgenden verstehen wir — wenn nicht das Gegenteil bemerkt wird — unter einem Graphen immer einen gerichteten Graphen.

Sind die Mengen Φ und Ψ endlich, so heißt der Graph *endlich.*

1. 2. Ketten

(1. 2. 1) Es sei $f(x)$ eine auf der Menge Ψ definierte ganzwertige Funktion. Wir nennen die lineare Form $\sum_{x \in \Psi} f(x)x$, sowie die Funktion $f(x)$ selbst (diese Zweideutigkeit führt zu keinem Mißverständnis) eine *Kette* und bezeichnen sie mit f. Der Wert $f(x)$ heißt die *Multiplizität* der Kante x in f. Ist die Anzahl der Kanten, die in f eine von Null verschiedene Multiplizität haben, endlich, so heißt die Kette *endlich.* In dieser Arbeit treten nur endliche Ketten auf, und deshalb wird das Wort „endlich" meistens weggelassen.

Sind die in f vorkommenden, von Null verschiedenen Multiplizitäten sämtlich positiv, so nennen wir die Kette *positiv.* Die Positivität der Kette f drücken wir mit der Ungleichung $f \geqq 0$ aus. Im allgemeinen fassen wir eine sich auf Funktionen beziehende Ungleichung bzw. Gleichung, in der das Argument nicht explizit vorkommt, derart auf, daß sie für jeden Argumentwert besteht. Dementsprechend bedeutet $f=0$, daß jede Kante in f die Multiplizität Null besitzt. $f \neq 0$ soll die Negation von $f=0$ bedeuten.

(1. 2. 2) Sind $f_1, \dots, f_n$ Ketten, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ganze Zahlen, so ist auch $f=\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$ eine Kette. Sind die Ketten $f_1, \dots, f_n$, sowie die ganzen Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positiv, so ist auch f positiv.

$f' \subset f$ soll bedeuten, daß die Ketten f' und f den Ungleichungen $f'f \geqq 0$ und $|f'| \leqq |f|$ gleichzeitig genügen.

Man kann die folgenden Behauptungen leicht einsehen:

Ist $f' \subset f$, so ist auch $f - f' \subset f$.

Aus $f \geqq 0$ und $f' \subset f$ folgt $f' \geqq 0$.

Sind $f_1, \dots, f_n$ positive Ketten, und ist $f = f_1 + \dots + f_n$, so ist $f_i \subset f$ $(i=1, \dots, n)$.

(1. 2. 3) Besitzt die Kette f die Eigenschaft, daß mit Ausnahme einer Kante x' jede Kante in f die Multiplizität Null besitzt und $|f(x')|=1$ ist, so nennen wir die Kette f eine *Kante.* (Wir werden solche Kanten gewöhnlich mit e bezeichnen.) Um die ursprünglichen Kanten von den jetzt definierten zu unterscheiden, werden wir die ersteren *Grundkanten* nennen. Kann jedoch kein Mißverständnis vorkommen, so werden wir statt Grundkante einfach Kante sagen.

Ist e eine Kante und ist $|e(x')|=1$, so heißt x' die *Grundkante von e.* Im Falle $e(x')=1$ ist $e=x'$. e ist jetzt eine *positive* Kante und wir sagen, daß der Anfangs- bzw. der Endpunkt der Kante e mit dem Anfangs- bzw. dem Endpunkt der Grundkante x' zusammenfällt. Falls $e(x') = -1$ ist, gilt $e = -x'$. Wir nennen jetzt e eine *negative* Kante, und wir verstehen unter dem Anfangs- bzw. Endpunkt der Kante e den Endpunkt bzw. Anfangspunkt der Grundkante x'. (Wie ersichtlich, kann man die positiven Kanten mit den Grundkanten identifizieren.) Wir werden die Tatsache, daß X' der Anfangspunkt, X'' der Endpunkt der Kante e ist, durch die Gleichung $e = e(X' X'')$ ausdrücken.

(1.2.4) Ist $f(x) \neq 0$, so heißt x eine *Grundkante der Kette f*. Ist $fe \geqq 0$ und $fe \neq 0$, so sagen wir, daß *e eine Kante von f ist*, oder daß *e auf f liegt*, oder daß *f e enthält*. Da wir nur endliche Ketten betrachten, hat jede Kette nur endlich viele Grundkanten und Kanten.

Ist e eine Kante von f und x' die Grundkante von e, so nennen wir den Wert $|f(x')|$ *die Multiplizität von e in f*.

Es sei die Folge $e_1, \ldots, e_n$ aus Kanten der Kette f gebildet. Kommt eine jede Kante von f in der Folge ebensooft vor, wie die Multiplizität der Kante in f ist, so gilt die Gleichung $f = e_1 + \cdots + e_n$, und wir sagen, daß *die Anzahl der Kanten von f* gleich n ist. Wir werden diese Anzahl der Kanten von f mit $\nu(f)$ bezeichnen. Wie ersichtlich, ist $\nu(f) = \sum_x |f(x)|$, wo das Zeichen $\sum_x$ die Summation nach allen Grundkanten x bedeutet.

In ähnlicher Auffassung wollen wir von der Anzahl derjenigen Kanten von f sprechen, die zu einem Punkte X inzident sind, von X auslaufen bzw. in X einlaufen. Wir bezeichnen diese Anzahlen, in der gleichen Reihenfolge, mit $\nu_X(f), \nu'_X(f), \nu''_X(f)$. Es gelten die Gleichungen

$$\nu_X(f) = 2\sum_x |f(x)||(x, X)|, \quad \nu'_X(f) = -2\sum_x{}' f(x)(x, X),$$
$$\nu''_X(f) = 2\sum_x{}'' f(x)(x, X);$$

hierbei bedeuten die Zeichen $\sum_x{}'$ bzw. $\sum_x{}''$ die Summation nach denjenigen Grundkanten, welche die Ungleichungen $f(x)(x, X) < 0$ bzw. $f(x)(x, X) > 0$ befriedigen.

Ist $\nu_X(f) > 0$, so sagen wir, daß *X ein Punkt von f ist*, oder daß *X auf f liegt*, oder daß *f X enthält*. Wegen der Endlichkeit der vorkommenden Ketten enthält jede Kette nur endlich viele Punkte.

(1.2.5) Wir führen das Zeichen (f, X) ein:

$$(f, X) = \sum_x f(x)(x, X) = \frac{1}{2}(\nu''_X(f) - \nu'_X(f)).$$

Ist $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, so gilt $(f, X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i, X)$.

Besitzt die Kette f die Eigenschaft, daß für jeden beliebigen Punkt X die Anzahl der von X auslaufenden Kanten von f gleich der Anzahl der in X einlaufenden Kanten von f ist, d. h. wenn für jedes X $(f, X)=0$ ist, so nennen wir die Kette f *geschlossen*, oder wir sagen, daß f ein *Zyklus* ist. Wir werden die Zyklen gewöhnlich mit dem Buchstaben z bezeichnen.

Sind $z_1, \ldots, z_n$ Zyklen, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ganze Zahlen, so ist auch $z=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i$ ein Zyklus.

(1. 2. 6) Es sei

$$(*) \qquad X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n$$

eine Folge von Punkten und Kanten, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$e_i = e_i(X_{i-1} X_i) \quad (i=1, \ldots, n), \quad X_i \neq X_j \quad \text{wenn} \quad i \neq j \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n).$$

Dann heißt die Kette $f = e_1 + \cdots + e_n$ ein *Weg*, genauer ein $X_0 X_n$-*Weg*, und wir nennen die Folge $(*)$ die zum Wege f gehörige Folge. X_0 und X_n sind die *Randpunkte*, X_0 der *Anfangspunkt*, X_n der *Endpunkt* des Weges. Die Punkte $X_1, \ldots, X_{n-1}$ nennen wir — wenn solche Punkte vorhanden sind — die *inneren* Punkte.

Es ist vorteilhaft, auch die Kette $f=0$ als einen XX-*Weg* zu betrachten, wo X jeden beliebigen Punkt bedeuten kann.

Die aus den Elementen der Folge $(*)$ gebildete Kette $f' = \sum_{i=j}^{k} e_i$ $(1 \leqq j \leqq k \leqq n)$ ist ein $X_{j-1} X_k$-Weg. Es gilt $f' \subset f$, und wir bezeichnen f' als den $X_{j-1} X_k$-*Teil* von f. Den Weg $f'=0$ werden wir als den $X_i X_i$-Teil von f betrachten $(i=0, 1, \ldots, n)$.

Ist in der Folge $X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n$ $X_0 = X_n$, sind jedoch $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ alle voneinander verschieden und gilt $e_i = e_i(X_{i-1} X_i)$ $(i=1, \ldots, n)$, so heißt die Kette $f = e_1 + \cdots + e_n$ ein *Kreis*. Wir werden die Kreise gewöhnlich mit dem Buchstaben k bezeichnen. Wir betrachten auch die Kette $f=0$ als einen Kreis.

Ist f ein Weg oder ein Kreis, so gilt $|f| \leqq 1$.

(1. 2. 7) SATZ. *Man kann jeden Zyklus z in der Form $z = \sum_{i=1}^{n} k_i$ darstellen, wobei k_i einen Kreis mit $k_i \subset z$ bedeutet $(i=1, \ldots, n)$.*

BEWEIS. Ist $z=0$, so kann man $n=1, k_1=0$ setzen. Es sei $z \neq 0$, und es sei $e_1 = e_1(X_0 X_1)$ eine beliebige Kante von z. Wegen der Geschlossenheit der Kette z existiert eine zu z gehörige Kante $e_2 = e_2(X_1 X_2)$. Aus dem gleichen Grunde gibt es auch eine zu z gehörige Kante $e_3 = e_3(X_2 X_3)$ usw. Da jedoch z nur endlich viele Punkte enthält, müssen in der Folge $X_0, X_1, X_2, \ldots$ gleiche Punkte vorkommen. Bezeichnen wir mit m die kleinste

Nummer, für die $X_m = X_{l-1}$ mit $l < m$ gilt; so ist $k_1 = \sum_{i=l}^{m} e_i$ ein Kreis, $k_1 \neq 0$ und $k_1 \subset z$. Ist $k_1 = z$, so ist der Beweis beendet. Ist $k_1 \neq z$, so ist der Zyklus $z - k_1 \neq 0$, und die Zahl der Kanten von $z - k_1$ ist kleiner als diejenige von z. Wir können unser Verfahren auf $z - k_1$ wiederholen. So erhalten wir einen Kreis k_2 mit $k_2 \subset z - k_1$ und $k_2 \neq 0$ usw. Da z nur endlich viele Kanten enthält, kommen wir nach einer endlichen Anzahl von Schritten zum Ende. Unsere Behauptung ist damit bewiesen.

Wir bemerken, daß die in (1. 2. 7) angegebene Darstellung auf mehrere Weise realisierbar ist, und man kann im Falle $z \neq 0$ auch die Forderung $k_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ erfüllen.

(1. 2. 8) *Ist $e = e(X'X'')$ eine Kante eines Zyklus z, so gibt es einen $X''X'$-Weg f mit $f \subset z$.*

Beweis. Nach (1. 2. 7) ist $z = \sum_{i=1}^{n} k_i$, wo k_i ein Kreis mit $k_i \subset z$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist. e muß in einem der Kreise k_i, zum Beispiel in k_1, enthalten sein. Dann ist jedoch $f = k_1 - e$ ein gesuchter Weg.

(1. 2. 9) *Ist f_i ein $X_{i-1}X_i$-Weg $(i = 1, \ldots, n)$, so gibt es einen X_0X_n-Weg f mit $f \subset f_1 + \cdots + f_n$.*

Beweis. Ist $X_0 = X_n$, so kann man $f = 0$ setzen. Es sei $X_0 \neq X_n$. Ergänzen wir dann den Graphen Γ mit einer neuen Grundkante $y = y(X_nX_0)$. In dem so entstandenen Graphen ist $z = f_1 + \cdots + f_n + y$ ein Zyklus, der die Kante y enthält. Nach (1. 2. 8) gibt es also einen X_0X_n-Weg f mit $f \subset z$. y kann aber nicht zu f gehören, und so gilt auch $f \subset f_1 + \cdots + f_n$.

(1. 2. 10) Aus (1. 2. 2), (1. 2. 7) und (1. 2. 9) ergeben sich die nachstehenden Sätze:

Jede Kante einer positiven Kette ist positiv.

Man kann jeden positiven Zyklus als Summe von positiven Kreisen darstellen.

Ist f_i ein positiver $X_{i-1}X_i$-Weg $(i = 1, \ldots, n)$, so gibt es einen positiven X_0X_n-Weg.

§ 2

2. 1. Die Bewertung der Kanten. Die Hauptsätze

(2. 1. 1) Es seien f und g *positive* Ketten. Wir wollen mit dem Wert

$$|f, g| = \sum_x f(x)\, g(x)$$

den „Inzidenzgrad" der Ketten f und g ausdrücken. Sind $x_1, \ldots, x_n$ die Grundkanten des positiven Kreises k, so ist $|f, k| = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$, d. h.

$|f, k|$ gibt die mit Multiplizitäten gerechnete Zahl der auf k liegenden Kanten von f an.

Ist $g = \sum_{i=1}^{n} g_i$, $g_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, so gilt $|f, g| = \sum_{i=1}^{n} |f, g_i|$.

(2.1.2) Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei — in diesem Paragraphen festgehaltene — auf der Menge Ψ definierte *ganzwertige* Funktionen. Wir nennen die Werte $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ den *φ-Wert* bzw. den *ψ-Wert der Kante x*.

Ist f eine Kette, so soll

$$\varphi[f] = \sum_x \varphi(x) f(x) \quad \text{bzw.} \quad \psi[f] = \sum_x \psi(x) f(x)$$

der *φ-Wert* bzw. der *ψ-Wert von f* heißen. Nach unseren Annahmen sind sämtliche φ- und ψ-Werte ganzzahlig.

Ist $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, so ist $\psi[f] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi[f_i]$.

Wir nennen einen *positiven* Zyklus z *kanteaufnehmbar* bzw. *kantefüllend*, wenn $z \leqq \varphi$ bzw. $z \geqq \varphi$ gilt.

Die *positive* Kette f heißt *kreisaufnehmbar* bzw. *kreisfüllend*, wenn für jeden *positiven* Kreis k $|f, k| \leqq \psi[k]$ bzw. $|f, k| \geqq \psi[k]$ besteht.

(2.1.3) *Ist $f \geqq 0$ und ist f kreisaufnehmbar bzw. kreisfüllend, so gilt für jeden positiven Zyklus z $|f, z| \leqq \psi[z]$ bzw. $|f, z| \geqq \psi[z]$.*

Beweis. Ist z ein positiver Zyklus, so ist nach (1.2.10) $z = \sum_{i=1}^{n} k_i$, wo die k_i positive Kreise bezeichnen. Ist nun f kreisaufnehmbar, so gilt

$$|f, z| = \sum_{i=1}^{n} |f, k_i| \leqq \sum_{i=1}^{n} \psi[k_i] = \psi[z].$$

Ähnlich sieht man die auf kreisfüllende Ketten bezügliche Behauptung ein.

Wir bezeichnen die Menge der kanteaufnehmbaren bzw. kantefüllenden *positiven* Zyklen mit Z_a bzw. Z_f, die Menge der kreisaufnehmbaren bzw. kreisfüllenden positiven Ketten mit F_a bzw. F_f.

(2.1.4) *Ist $z \in Z_a$ und $f \in F_f$, so gilt $\psi[z] \leqq \varphi[f]$.*

Beweis. Nach (2.1.3) ist

$$\psi[z] \leqq |f, z| = \sum_x f(x) z(x) \leqq \sum_x f(x) \varphi(x) = \varphi[f].$$

Ähnlich kann man die folgende Behauptung beweisen:

(2.1.5) *Ist $z \in Z_f$ und $f \in F_a$, so gilt $\psi[z] \geqq \varphi[f]$.*

Aus (2.1.4) und (2.1.5) bekommt man die folgenden Ungleichungen:

$$\max_{z \in Z_a} \psi[z] \leqq \min_{f \in F_f} \varphi[f], \quad \min_{z \in Z_f} \psi[z] \geqq \max_{f \in F_a} \varphi[f],$$

vorausgesetzt, daß die vorkommenden Extremwerte existieren.

In den Abschnitten 2.2, 2.3 und 2.4 beweisen wir die folgenden zwei Hauptsätze:

(2.1.6) SATZ. *Ist Γ endlich und ist $\varphi \geqq 0$, so existieren die Werte* $\max_{z \in Z_a} \psi[z]$ *und* $\min_{f \in F_f} \varphi[f]$, *und diese Werte sind einander gleich.*

(2.1.7) SATZ. *Ist Γ endlich, und ist für jeden positiven Kreis k $\psi[k] \geqq 0$, liegt ferner jede Kante x, für welche $\varphi(x) > 0$ ist, auf einem positiven Kreis, so existieren die Werte* $\min_{z \in Z_f} \psi[z]$ *und* $\max_{f \in F_a} \varphi[f]$, *und diese Werte sind einander gleich.*

2.2. Zwei Hilfssätze

(2.2.1) HILFSSATZ. *Ist Γ endlich, und ist für jeden positiven Kreis k $\psi[k] \leqq 0$, so existiert eine auf Φ definierte ganzwertige Funktion $s(X)$, für die*

$$\psi(x) \leqq s(X'') - s(X')$$

für jede beliebige Grundkante $x = x(X'X'')$ besteht.

BEWEIS. Es sei X ein beliebiger Punkt des Graphen Γ, und bezeichnen wir mit $H(X)$ die Menge der positiven X_0X-Wege, wobei X_0 sämtliche Punkte des Graphen durchläuft. Da Γ endlich und der XX-Weg $f = 0$ ein Element von $H(X)$ ist, ist $H(X)$ endlich und nicht leer. Es existiert also der Wert

$$s(X) = \max_{f \in H(X)} \psi[f].$$

Wir zeigen, daß $s(X)$ den gewünschten Forderungen entspricht. Erstens ist $s(X)$ offensichtlich eine ganze Zahl. Es sei nun weiter $x = x\,(X'X'')$ eine beliebige Kante und f' ein positiver X_0X'-Weg, für den $\psi[f'] = s(X')$ gilt.

(1) Enthält f' den Punkt X'' nicht, so ist $f'' = f' + x$ ein positiver X_0X''-Weg, und es besteht

$$s(X') + \psi(x) = \psi[f'] + \psi(x) = \psi[f''] \leqq s(X'').$$

(2) Enthält f' den Punkt X'', so teilt X'' den Weg f' in die Teile f_1' und f_2', wo f_1' ein positiver X_0X''-Weg, f_2' ein positiver $X''X'$-Weg ist. Es gilt $\psi[f_1'] \leqq s(X'')$, und da $k = f_2' + x$ ein positiver Kreis ist, besteht auch $\psi[f_2'] + \psi(x) = \psi[k] \leqq 0$. Aus diesen Ungleichungen folgt

$$s(X') + \psi(x) = \psi[f_1'] + \psi[f_2'] + \psi(x) \leqq s(X'').$$

Aus (2.2.1) kann man den folgenden Satz leicht ableiten:

(2.2.2) HILFSSATZ. *Ist Γ endlich und ist für jeden positiven Kreis k $\psi[k] \geqq 0$, so existiert eine auf Φ definierte ganzwertige Funktion $s(X)$, für die*

$$\psi(x) \geqq s(X'') - s(X')$$

für jede beliebige Grundkante $x = x(X'X'')$ besteht.

2.3. Beweis des Satzes (2.1.6)

(2.3.1) Zuerst beweisen wir, daß der allgemeine Fall auf den Fall $\varphi > 0$ zurückführbar ist. Wir nennen eine jede Kante, deren φ-Wert gleich Null ist, eine 0-*Kante*. Wir zeigen, daß die Weglassung der 0-Kanten weder die Existenz noch die Größe der im Satze auftretenden Extremwerte beeinflußt.

Was den Maximalwert anbelangt, folgt unsere Behauptung aus der Tatsache, daß die Zyklen von Z_a keine 0-Kanten enthalten, und deshalb die Weglassung der 0-Kanten die Elemente von Z_a nicht berührt.

Bei der Untersuchung des Minimalwertes ziehen wir in Betracht, daß die positiven Kreise des durch die Weglassung entstehenden Graphen mit denjenigen positiven Kreisen des ursprünglichen Graphen übereinstimmen, die keine 0-Kanten enthalten. Es ist ferner klar, daß die zu den 0-Kanten gehörigen Multiplizitäten (d. h. die $f(x)$ Werte) einer Kette f den Wert $\varphi[f]$ nicht beeinflussen. Nun folgt aus den obigen: Ist f im ursprünglichen Graphen kreisfüllend, so bleibt diese Eigenschaft auch nach der Weglassung in Kraft, und auch $\varphi[f]$ bleibt unverändert. Ist hingegen f im neuen Graphen kreisfüllend, so kann man wegen der Endlichkeit des Graphen die 0-Kanten mit so großen f Werten versehen, daß f auch im ursprünglichen Graphen kreisfüllend wird; dabei bleibt $\varphi[f]$ unverändert.

Aus den vorgeführten Betrachtungen folgt die zu beweisende Behauptung.

(2.3.2) Wegen der Annahme $\varphi \geqq 0$ ist der Zyklus $z = 0$ ein Element von Z_a. Aus der Endlichkeit von Γ und der Ganzwertigkeit der Ketten folgt die Endlichkeit von Z_a. Es existiert daher der Wert $\max\limits_{z \in Z_a} \psi[z]$.

Es sei $\tilde{z}$ ein — im Abschnitt 2.3 festgehaltenes — Element von Z_a, für welches $\psi[\tilde{z}] = \max\limits_{z \in Z_a} \psi[z]$ gilt.

Zum Beweis des Satzes (2.1.6) genügt es wegen (2.1.4) zu zeigen, daß eine solche positive, kreisfüllende Kette f existiert, für welche $\varphi[f] = \psi[\tilde{z}]$ besteht. Die Existenz einer solchen Kette beweisen wir in mehreren Schritten. Wir setzen im folgenden voraus, daß $\varphi > 0$ ist.

(2.3.3) *Es existiert eine auf Φ definierte ganzwertige Funktion $s(X)$, welche die folgende Eigenschaft besitzt: Für eine jede Kante $x = x(X'X'')$ gilt*

(1) $$\psi(x) \leqq s(X'') - s(X'), \quad \textit{falls} \quad 0 = \tilde{z}(x) < \varphi(x),$$

(2) $$\psi(x) = s(X'') - s(X'), \quad \textit{falls} \quad 0 < \tilde{z}(x) < \varphi(x),$$

(3) $$\psi(x) \geqq s(X'') - s(X'), \quad \textit{falls} \quad 0 < \tilde{z}(x) = \varphi(x)$$

ist.

Beweis. Wir konstruieren aus Γ einen neuen Graphen Γ': Die Punkte von Γ' seien identisch mit den Punkten von Γ. Ist $x=x(X'X'')$ eine Grundkante von Γ, und ist

(1′) $\tilde{z}(x)=0$, so sei x mit unverändertem ψ-Wert auch eine Kante von Γ';

(2′) $0<\tilde{z}(x)<\varphi(x)$, so sei x mit unverändertem ψ-Wert auch eine Kante von Γ', außerdem nehmen wir jedoch noch eine neue Grundkante $\bar{x}=\bar{x}(X''X')$ mit $\psi(\bar{x})=-\psi(x)$ auf;

(3′) $0<\tilde{z}(x)=\varphi(x)$, so lassen wir die Kante x weg und wir nehmen die neue Kante $\bar{x}=\bar{x}(X''X')$ mit $\psi(\bar{x})=-\psi(x)$ auf.

Wir werden die in den Fällen (2′) und (3′) auftretenden Kanten x und $\bar{x}$ als zueinander gehörige Kanten bezeichnen.

Nun zeigen wir, daß für jeden positiven Kreis k' von Γ' die Ungleichung $\psi[k']\leqq 0$ gilt.

Unsere Behauptung ist trivial für $k'=0$ und für diejenigen Kreise, die aus zwei zusammengehörigen Kanten x und $\bar{x}$ bestehen. Ist k' von diesen verschieden und enthält es eine neue Kante $\bar{x}$, so kann es die zu $\bar{x}$ gehörige alte Kante x nicht enthalten. Ersetzen wir in k' eine jede solche Kante $\bar{x}$ durch die Kante $-x$, wo immer x und $\bar{x}$ zusammengehörige Kanten bezeichnen, so bekommen wir einen eventuell nicht positiven Kreis k_1 des Graphen Γ. Es gilt $\psi[k_1]=\psi[k']$. Enthält k' keine neue Kante, so sei $k_1=k'$. Die Kette $z_1=\tilde{z}+k_1$ ist ein Zyklus von Γ. Es gilt $z_1\geqq 0$. Es ist nämlich $\tilde{z}$ ganzwertig und $\tilde{z}\geqq 0$. Ferner ist $|k_1|\leqq 1$ und $k_1(x)<0$ kann nur für solche Kanten x bestehen, zu welchen wir neue Kanten zugeordnet haben, also für welche $\tilde{z}(x)>0$ gilt. Es besteht weiter $z_1\leqq\varphi$, da φ und $\tilde{z}$ ganzwertig sind, $|k_1|\leqq 1$ ist und $k_1(x)>0$ nur für solche Kanten x bestehen kann, die auch in k' enthalten sind, was nur im Falle $\tilde{z}(x)<\varphi(x)$ möglich ist. Unsere Behauptungen bedeuten aber, daß $z_1\in Z_a$ ist. Demzufolge gilt $\psi[\tilde{z}]+\psi[k_1]=\psi[z_1]\leqq\psi[\tilde{z}]$, woraus $\psi[k']=\psi[k_1]\leqq 0$ folgt.

Man kann nun auf Γ' den Hilfssatz (2. 2. 1) anwenden. Nach diesem existiert eine ganzwertige Funktion $s(X)$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $x=x(X'X'')$ eine zu Γ' gehörige alte Kante, so besteht $\psi(x)\leqq s(X'')-s(X')$. Ist $\bar{x}=\bar{x}(X''X')$ eine neue Kante, so besteht $\psi(\bar{x})\leqq s(X')-s(X'')$, d. h. für die zu $\bar{x}$ gehörige alte Kante $x=x(X'X'')$ gilt $\psi(x)\geqq s(X'')-s(X')$. Aus der Definition von Γ' folgt jetzt, daß $s(X)$ den in (2. 3. 3) gestellten Forderungen entspricht.

(2. 3. 4) Es sei $x=x(X'X'')$ eine beliebige Kante von Γ, und es sei
$$f(x)=\max\,[0,\psi(x)-(s(X'')-s(X'))],$$
wo $s(X)$ eine den in (2. 3. 3) gestellten Forderungen entsprechende Funktion bezeichnet. Wir zeigen, daß $f\in F_f$ und $\varphi[f]=\psi[\tilde{z}]$ gilt.

$f(x)$ kann nur nichtnegative, ganze Werte annehmen, sie ist also eine positive Kette. Es gilt ferner für jede Kante $x = x(X'X'')$

(4) $$f(x) \geqq \psi(x) - (s(X'') - s(X')).$$

Nach (2. 3. 3) (2) und (3)

(5) gilt $f(x) = \psi(x) - (s(X'') - s(X'))$, falls $\tilde{z}(x) > 0$ ist.

Man sieht auch, daß $f(x) > 0$ nur im Falle $\tilde{z}(x) = \varphi(x)$ eintreten kann. Daraus folgt, daß

(6) $$f(x)\varphi(x) = f(x)\tilde{z}(x)$$

für jede Kante x besteht.

f ist kreisfüllend. Es sei nämlich k ein beliebiger positiver Kreis. Falls $k = 0$ ist, so gilt $|f, k| = \psi[k] = 0$. Ist $k \neq 0$, so seien $x_1, \ldots, x_n$ die Kanten von k, und es sei $x_i = x_i(X_{i-1}X_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $X_n = X_0$. Dann ist nach (4)

$$|f, k| = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} \{\psi(x_i) - [s(X_i) - s(X_{i-1})]\} = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i) = \psi[k].$$

In gleicher Weise ergibt sich aus (5), daß im Falle $k \subset \tilde{z}$ $|f, k| = \psi[k]$ besteht.

Um die Gleichung $\varphi[f] = \psi[\tilde{z}]$ zu beweisen, betrachten wir eine nach (1. 2. 7) existierende Darstellung $\tilde{z} = \sum_{i=1}^{m} k_i$ von $\tilde{z}$, wo k_i ein Kreis und $k_i \subset \tilde{z}$ ist $(i = 1, \ldots, m)$. Es gelten die Gleichungen $|f, k_i| = \psi[k_i]$ $(i = 1, \ldots, m)$, und aus diesen und (6) folgt

$$\varphi[f] = \sum_{x} f(x)\varphi(x) = \sum_{x} f(x)\tilde{z}(x) = \sum_{x} f(x)\left(\sum_{i=1}^{m} k_i(x)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{x} f(x) k_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{m} |f, k_i| = \sum_{i=1}^{m} \psi[k_i] = \psi[\tilde{z}].$$

Damit haben wir den Beweis des Satzes (2. 1. 6) beendet.

2. 4. Beweis des Satzes (2. 1. 7)

(2. 4. 1) Z_f ist nicht leer. Wählen wir nämlich zu jeder Kante x, mit $\varphi(x) > 0$, einen x enthaltenden, positiven Kreis k_x, so ist $z = \sum_{x}^{+} \varphi(x) k_x$ ein positiver, kantefüllender Zyklus; dabei bedeutet $\sum_{x}^{+}$ die Summation nach sämtlichen Elementen von Ψ, die positive φ-Werte besitzen.

Aus der Annahme, daß die ψ-Werte der positiven Kreise nicht negativ sind, und aus (1. 2. 10) folgt $\psi[z] \geqq 0$ für jeden positiven Zyklus z. Daraus und aus der Ganzzahligkeit der ψ-Werte ergibt sich, daß der Wert $\min_{z \in Z_f} \psi[z]$ existiert.

Es sei $\tilde{z}$ ein im Abschnitt 2.4 festgehaltenes Element von Z_f, für welches $\psi[\tilde{z}] = \min_{z \in Z_f} \psi[z]$ gilt.

Zum Beweis des Satzes (2.1.7) genügt es, nach (2.1.5) zu zeigen, daß eine positive kreisaufnehmbare Kette f existiert, für die $\varphi[f] = \psi[\tilde{z}]$ besteht. Die Existenz einer solchen Kette beweisen wir in mehreren Schritten.

(2.4.2) *Es existiert eine auf Φ definierte ganzwertige Funktion $s(X)$, welche die folgende Eigenschaft besitzt:*

(1) *Für jede Kante $x = x(X'X'')$ ist $\psi(x) \geqq s(X'') - s(X')$.*

(2) *Für diejenigen Kanten $x = x(X'X'')$, die der Ungleichung $\tilde{z}(x) > \max(0, \varphi(x))$ genügen, gilt $\psi(x) = s(X'') - s(X')$.*

Beweis. Durch Hinzufügung neuer Grundkanten konstruieren wir aus Γ einen neuen Graphen Γ' wie folgt: Genügt eine Kante $x = x(X'X'')$ von Γ der Ungleichung $\tilde{z}(x) > \max(0, \varphi(x))$, so fügen wir zu x eine neue Grundkante $\bar{x} = \bar{x}(X''X')$ mit $\psi(\bar{x}) = -\psi(x)$ hinzu.

Durch die in (2.3.3) angewendete Schlußweise können wir zeigen, daß für jeden positiven Kreis k' von Γ' $\psi[k'] \geqq 0$ gilt. Nach dem Hilfssatz (2.2.2) existiert dann eine ganzwertige Funktion $s(X)$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $x = x(X'X'')$ eine beliebige Kante von Γ, so gilt $\psi(x) \geqq s(X'') - s(X')$. Ist $\bar{x} = \bar{x}(X''X')$ eine neue Kante, so gilt $\psi(\bar{x}) \geqq s(X') - s(X'')$, d. h. für die zu $\bar{x}$ gehörige alte Kante $x = x(X'X'')$ gilt $\psi(x) \leqq s(X'') - s(X')$. Aus der Definition von Γ' folgt jetzt, daß $s(X)$ den in (2.4.2) gestellten Forderungen genügt.

(2.4.3) Wir definieren die Funktion $f(x)$ folgendermaßen:

$$\begin{cases} f(x) = \psi(x) - (s(X'') - s(X')), & \text{falls } \tilde{z}(x) = \varphi(x) \text{ ist,} \\ f(x) = 0, & \text{falls } \tilde{z}(x) > \varphi(x) \text{ ist;} \end{cases}$$

dabei bedeutet $x = x(X'X'')$ eine beliebige Kante von Γ und $s(X)$ eine den in (2.4.2) gestellten Forderungen genügende Funktion. Wir zeigen, daß $f \in F_a$ ist, und daß $\varphi[f] = \psi[\tilde{z}]$ gilt.

$f(x)$ kann nur nichtnegative ganze Werte annehmen, d. h. f ist eine positive Kette. Ferner gilt

(3) für jede Kante $x = x(X'X'')$ die Ungleichung $f(x) \leqq \psi(x) - (s(X'') - s(X'))$;

(4) für diejenigen Kanten $x = x(X'X'')$, die der Ungleichung $\tilde{z}(x) > 0$ genügen, die Gleichung $f(x) = \psi(x) - (s(X'') - s(X'))$.

Die letzte Behauptung folgt im Falle $\tilde{z}(x) = \varphi(x)$ aus der Definition von f, im Falle $\tilde{z}(x) > \varphi(x)$ aus (2.4.2), da in diesem Falle $\tilde{z}(x) > \max(0, \varphi(x))$ ist.

Laut der Definition von f kann $f(x)>0$ nur im Falle $\tilde{z}(x)=\varphi(x)$ bestehen und daraus ergibt sich die Gleichung

$$f\varphi = f\tilde{z}. \tag{5}$$

Ganz ähnlich wie in (2.3.4) kann man mit Hilfe von (3), (4) und (5) zeigen, daß f kreisaufnehmbar ist und daß $\varphi[f]=\psi[\tilde{z}]$ gilt. Damit ist der Beweis des Satzes (2.1.7) beendet.

2.5. Nicht-ganzzahlige Bewertungen

Man kann die Sätze (2.1.6) und (2.1.7) auch auf solche Fälle übertragen, wo die Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ und $z(x)$ auch nicht-ganzzahlige Werte annehmen. Die Definitionen und Sätze bleiben — mit eventuellen kleineren Änderungen — auch dann in Kraft, wenn wir die Forderung und die Behauptung der Ganzzahligkeit weglassen. Es ist zum Beispiel $z(x)$ ein Zyklus, wenn für jeden Punkt X $(z,X)=\sum_x z(x)(x,X)=0$ gilt. Ferner ist es leicht ersichtlich, daß wir statt der nach (1.2.7) existierenden Zerlegung $z=\sum_{i=1}^{n} k_i$ die Existenz einer Darstellung $z=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i k_i$ beweisen können, wo $\lambda_i \geqq 0$ und k_i ein Kreis mit $k_i \subset z$ ist $(i=1,\ldots,n)$.

Die Existenz der in (2.1.6) und (2.1.7) auftretenden Extremwerte kann man durch die gewöhnliche Schlußweise der Theorie der reellen Funktionen erhalten; man muß nur die Grundkanten des Graphen irgendwie in eine Folge $x_1,\ldots,x_n$ ordnen, und zu einer jeden Kette f einen Punkt $[f(x_1),\ldots,f(x_n)]$ eines n-dimensionalen Raumes zuordnen.

Die Definition der Kette z_1 in (2.3.3) muß man folgendermaßen abändern: Es sei ζ bzw. δ das Minimum der positiven Werte, welche die Funktion $\tilde{z}(x)$ bzw. $\varphi(x)-\tilde{z}(x)$ annimmt. Ist $\tilde{z}=0$ bzw. $\varphi-\tilde{z}=0$, so sei $\zeta=1$ bzw. $\delta=1$. Ferner sei $\varepsilon=\min(\zeta,\delta,1)$. Es ist dann $\varepsilon>0$. Wir setzen

$$z_1=\tilde{z}+\varepsilon k_1.$$

Eine ähnliche Änderung muß man in (2.4.2) durchführen.

Man kann nun leicht kontrollieren, daß durch die erwähnten Modifizierungen die Beweise der Sätze (2.1.6) und (2.1.7) auch auf nicht-ganzzahlige Funktionenwerte anwendbar sind.

2.6. Übertragung des Satzes (2.1.6) auf unendliche Graphen

(2.6.1) Satz. *Betrachten wir auch weiterhin nur endliche Ketten, so gilt der Satz* (2.1.6) *auch bezüglich unendlicher Graphen, vorausgesetzt, daß die folgenden Bedingungen bestehen:*

(1) *Die ψ-Werte der kanteaufnehmbaren positiven Zyklen sind von oben beschränkt.*
(2) *Die Anzahl der 0-Kanten ist endlich.*
(3) *Die ψ-Werte der positiven Kreise, die 0-Kanten enthalten, sind von oben beschränkt.*

Den Beweis erhalten wir durch folgende Modifizierung des Beweises von (2. 1. 6).

(2. 6. 2) Es genügt, uns wieder nur mit dem Fall $\varphi > 0$ zu beschäftigen. Dies kann man aus den Bedingungen (2) und (3) ebenso einsehen, wie das in (2. 3. 1) geschah. Wir heben hervor, daß zufolge $\varphi > 0$ jeder positive Kreis kanteaufnehmbar ist.

Gilt für jeden positiven Kreis k $\psi[k] \leqq 0$, so ist die Kette $f=0$ kreisfüllend, und dann ist die Behauptung unseres Satzes trivial. Wir setzen daher im folgenden voraus, daß es einen positiven Kreis mit *positivem* ψ-Wert gibt.

Der Zyklus $z=0$ ist ein Element von Z_a; Z_a ist also nicht leer. Die Existenz des Wertes $\max\limits_{z \in Z_a} \psi[z] = \mu$ ist jetzt eine einfache Folge der Bedingung (1) und der Ganzwertigkeit der ψ-Werte. Es gilt $\mu > 0$, da nach unseren Voraussetzungen ein Element von Z_a mit positivem ψ-Wert existiert.

Es sei wieder $\tilde{z}$ ein im Abschnitt 2. 6 festgehaltenes Element von Z_a, für welches $\psi[\tilde{z}] = \mu$ gilt. Wegen $\mu > 0$ ist $\tilde{z} \neq 0$. Zum Beweis unseres Satzes genügt auch jetzt, die Existenz eines solchen Elementes von F_f zu zeigen, für welches $\varphi[f] = \psi[\tilde{z}]$ gilt. Das geschieht in mehreren Schritten.

(2. 6. 3) Zuerst führen wir einige neuen Abkürzungen und Begriffe ein.

Die zu $\tilde{z}$ gehörigen Punkte und Kanten wollen wir *$\tilde{z}$-Punkte* bzw. *$\tilde{z}$-Kanten* nennen.

Haben die Punkte X und X' des Graphen Γ die Eigenschaft, daß sowohl ein positiver XX'-Weg wie auch ein positiver $X'X$-Weg existiert, so sagen wir, daß *X mit X' (in Γ) in Verbindung steht,* oder daß *X und X' (in Γ) miteinander in Verbindung stehen.* Es ist klar, daß X mit X, und wenn X mit X', dann auch X' mit X in Verbindung steht. Aus (1. 2. 10) folgt ferner, daß wenn X mit X' und X' mit X'', dann auch X mit X'' in Verbindung steht. Wie ersichtlich, stehen zwei beliebige Punkte eines positiven Kreises immer miteinander in Verbindung. Aus (1. 2. 8) folgt, daß die Randpunkte einer jeden $\tilde{z}$-Kante miteinander in Verbindung stehen.

Wir definieren die Teilmenge Φ_z von Φ wie folgt: Ein Punkt gehört dann und nur dann zu Φ_z, wenn er mit irgendeinem $\tilde{z}$-Punkt in Verbindung steht. Die Teilmenge Ψ_z von Ψ wird folgendermaßen definiert: Eine Kante gehört dann und nur dann zu Ψ_z, wenn die Randpunkte der Kante zu Φ_z gehören, und wenn diese Randpunkte miteinander in Verbindung stehen.

Φ_z bzw. Ψ_z enthält sämtliche Punkte bzw. Kanten von $\tilde{z}$. Da $\tilde{z} \neq 0$ ist, sind Φ_z und Ψ_z nicht leer.

(2. 6. 4) Wir werden nachfolgend in (2. 6. 5) beweisen, daß eine auf Φ_z definierte ganzwertige Funktion $s(X)$ existiert, für die eine jede Kante $x = x(X'X'')$ von Ψ_z den in (2. 3. 3) gestellten Forderungen (1), (2) und (3) genügt. Mit einer solchen Funktion $s(X)$ definieren wir die Kette f folgendermaßen:

Ist $x \notin \Psi_z$, so sei $f(x) = 0$. Ist $x \in \Psi_z$ und $x = x(X'X'')$, so sei $f(x) = \max [0, \psi(x) - (s(X'') - s(X'))]$.

Da $0 < \tilde{z}(x) = \varphi(x)$ nur für endlich viele Kanten bestehen kann, ist f eine *endliche* Kette. Ferner ist f offensichtlich eine *positive* Kette.

Für eine jede Kante $x = x(X'X'')$ der Menge Ψ_z gilt $f(x) \geqq \psi(x) - (s(X'') - s(X'))$, gehört jedoch die Kante auch zu $\tilde{z}$, so gilt $f(x) = \psi(x) - (s(X'') - s(X'))$.

Wie ersichtlich, besteht die Gleichung $f(x)\varphi(x) = f(x)\tilde{z}(x)$ für jede Kante des Graphen.

f ist kreisfüllend. Enthält nämlich der positive Kreis k keine $\tilde{z}$-Kante, so ist der positive Zyklus $z_2 = \tilde{z} + k$ wegen $\varphi > 0$ kanteaufnehmbar, d. h. es ist $z_2 \in Z_a$, und daher gilt $\psi[\tilde{z}] + \psi[k] = \psi[z_2] \leqq \psi[\tilde{z}]$, also ist $\psi[k] \leqq 0$ und $|f, k| \geqq \psi[k]$. Enthält k eine $\tilde{z}$-Kante, so gehört jeder Punkt bzw. jede Kante des Kreises zu Φ_z bzw. Ψ_z, und man kann dann die Ungleichung $|f, k| \geqq \psi[k]$ genau wie in (2. 3. 4) beweisen.

Schließlich kann man die Behauptungen, daß im Falle $k \subset \tilde{z}$ die Gleichung $|f, k| = \psi[k]$ gilt, und daß $\varphi[f] = \psi[\tilde{z}]$ ist, ebenfalls mit der in (2. 3. 4) angewendeten Schlußweise beweisen.

(2. 6. 5) Zum Beweis des Satzes (2. 6. 1) blieb es nur zu zeigen, daß die in (2. 6. 4) verwendete Funktion $s(X)$ wirklich existiert. Den Beweis führen wir in mehreren Schritten.

(I) Wir konstruieren aus Γ mit dem in (2. 3. 3) angewendeten Verfahren den Graphen Γ'. Dann gilt für jeden positiven Kreis k' von Γ' $\psi[k'] \leqq 0$.

Wir zeigen erst, daß wenn X_1 und X_2 in Γ, so auch in Γ' miteinander in Verbindung stehen und umgekehrt, daß die Verbindung in Γ' diejenige in Γ nach sich zieht.

Es sei f ein positiver X_1X_2-Weg von Γ. Wir konstruieren aus f einen positiven X_1X_2-*Weg* f' des Graphen Γ'. Gilt für jede Kante x von f $\tilde{z}(x) < \varphi(x)$, so ist jede Kante von f auch eine Kante von Γ', und man kann $f' = f$ setzen. Es sei nun $x = x(X'X'')$ eine solche Kante von f, die in Γ' nicht vorkommt, d. h. für die $0 < \tilde{z}(x) = \varphi(x)$ gilt. x ist eine $\tilde{z}$-Kante, und so existiert nach (1. 2. 8) ein aus lauter $\tilde{z}$-Kanten bestehender $X''X'$-Weg f_1 in Γ.

Zu jeder $\tilde{z}$-Kante gehört aber eine neue Kante, und so bilden die zu den Kanten von f_1 gehörigen neuen Kanten einen positiven $X'X''$-Weg von Γ'. Nimmt man nun zu jeder Kante von f, die in Γ' nicht vorkommt, einen solchen positiven Weg von Γ', so bilden diese Wege zusammen mit denjenigen Kanten von f, die auch in Γ' vorkommen, eine Folge von sich einander anschließenden positiven Wegen, die in Γ' von X_1 zu X_2 führen. Dann existiert aber nach (1. 2. 10) ein in Γ' liegender, positiver X_1X_2-Weg.

Umgekehrt sei jetzt f' ein positiver X_1X_2-Weg von Γ'. Wir zeigen, daß dann auch in Γ ein positiver X_1X_2-Weg existiert. Enthält f' keine neue Kante, so ist f' selbst ein positiver Weg von Γ. Nehmen wir nun an, daß f' eine neue Kante $\bar{x}=\bar{x}(X''X')$ enthält. Die zu $\bar{x}$ gehörige alte Kante sei $x=x(X'X'')$. Es muß dann x eine $\tilde{z}$-Kante sein und daraus folgt, daß ein positiver $X''X'$-Weg von Γ existiert. Nimmt man zu jeder neuen Kante von f' einen solchen Weg von Γ, so bilden diese Wege zusammen mit denjenigen Kanten von f', die auch in Γ vorkommen, eine Folge von sich einander anschließenden positiven Wegen, die in Γ von X_1 zu X_2 führen. Dann existiert aber nach (1. 2. 10) ein in Γ liegender positiver X_1X_2-Weg.

Aus der bewiesenen Behauptung folgt, daß die Menge derjenigen Punkte, die in Γ' mit $\tilde{z}$-Punkten in Verbindung stehen, mit Φ_z identisch ist.

(II) Es sei $X\in\Phi_z$ und bezeichnen wir die Menge derjenigen in Γ' liegenden positiven X_0X-Wege, wo X_0 sämtliche mit X in Verbindung stehenden $\tilde{z}$-Punkte durchläuft, mit $H'(X)$. Es sind dann die ψ-Werte der zu $H'(X)$ gehörigen Wege von oben beschränkt.

Beweis. Es sei der X_0X-Weg f' ein Element von $H'(X)$ und f_0' ein positiver XX_0-Weg von Γ'. Die Kette $z'=f'+f_0'$ ist ein positiver Zyklus von Γ'. Wir betrachten eine Zerlegung $z'=\sum_{i=1}^{n}k_i'$ von z', wo k_i' ein positiver Kreis von Γ' ist $(i=1,\dots,n)$. Da die ψ-Werte der positiven Kreise von Γ' nicht positiv sind, gilt $\psi[z']=\sum_{i=1}^{n}\psi[k_i']\leqq 0$. Demzufolge ist $\psi[f']=$ $=\psi[z']-\psi[f_0']\leqq-\psi[f_0']$. Daraus und aus der Endlichkeit der Anzahl der $\tilde{z}$-Punkte folgt unsere Behauptung.

(III) Es sei X ein beliebiges Element von Φ_z. Aus (II) und aus der Ganzzahligkeit der ψ-Werte folgt die Existenz von

$$s(X)=\max_{f'\in H'(X)}\psi[f'].$$

Ganz ähnlich wie im Beweis des Hilfssatzes (2. 2. 1) kann man jetzt aus der Tatsache, daß sämtliche positive Kreise von Γ' nichtpositive ψ-Werte besitzen, zeigen, daß eine jede alte Kante $x=x(X'X'')$ bzw. eine jede neue

Kante $\bar{x}=\bar{x}(X''X')$, deren Randpunkte zu Φ_z gehören und miteinander in Verbindung stehen, die Ungleichung

$$\psi(x) \leqq s(X'')-s(X') \quad \text{bzw.} \quad \psi(\bar{x}) \leqq s(X')-s(X'')$$

befriedigt. Daraus folgt aber ähnlicherweise wie unter (2. 3. 3), daß $s(X)$ den in (2. 6. 4) gestellten Forderungen genügt.

§ 3

3.1. Neue Fassung der Sätze (2. 1. 6) und (2. 1. 7)

(3. 1. 1) Wir können den Sätzen (2. 1. 6) und (2. 1. 7) eine anschaulichere Fassung geben, wenn wir — entsprechend der Darstellung (1. 2. 7) bzw. $f=e_1+\cdots+e_n$ (s. (1. 2. 4)) — die Zyklen durch „Kreissysteme", die (kreisfüllenden und kreisaufnehmbaren) positiven Ketten durch „Kantensysteme" ersetzen.

Das *Kreissystem* $\varkappa=(k_1,\ldots,k_n)$ bzw. das *Kantensystem* $\varepsilon=(x_1,\ldots,x_n)$ ist eine solche Folge von Kreisen bzw. Grundkanten, wo ein Kreis bzw. eine Kante auch *mehrmals* vorkommen kann. Diejenigen Folgen, die sich nur in der Reihenfolge ihrer Elemente unterscheiden, betrachten wir als identisch. Es ist vorteilhaft, auch die „leere Folge" als System zu betrachten. Daß ein System leer ist, werden wir mit $\varkappa=0$ bzw. $\varepsilon=0$ ausdrücken.

(3. 1. 2) Sind alle Kreise eines Kreissystems positiv, so heißt das System *positiv*. Das System $\varkappa=0$ nennen wir auch positiv. Ist $\varkappa=(k_1,\ldots,k_n)$, so heißt $\psi[\varkappa]=\sum_{i=1}^{n}\psi[k_i]$ der ψ-Wert von $\varkappa$. Ist $\varkappa=0$, so sei $\psi[\varkappa]=0$. (Ein Kreis ist positiv, wenn jede seiner Kanten positiv ist. Nach (2. 1. 2) gilt für eine positive Kante $e=x$, $\psi[e]=\psi(x)$, für eine negative $e=-x$, $\psi[e]=-\psi(x)$. Der ψ-Wert eines Kreises ist die Summe der ψ-Werte seiner Kanten.)

Das Zeichen $|\varkappa, x|$ soll die Anzahl derjenigen Kreise der Folge $k_1,\ldots,k_n$ bedeuten, welche die Kante x als Grundkante enthalten (d. h. es besteht $k_i(x)\neq 0$). Ist $\varkappa=0$, so sei $|\varkappa, x|=0$.

Das Kreissystem $\varkappa$ heißt *kanteaufnehmbar* bzw. *kantefüllend*, wenn für jede Kante x $|\varkappa, x| \leqq \varphi(x)$ bzw. $|\varkappa, x| \geqq \varphi(x)$ gilt.

(3. 1. 3) Ist $\varepsilon=(x_1,\ldots,x_n)$, so heißt $\varphi[\varepsilon]=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)$ der φ-Wert von ε. Ist $\varepsilon=0$, so sei $\varphi[\varepsilon]=0$.

Das Zeichen $|\varepsilon, k|$ soll die Anzahl derjenigen Kanten der Folge $x_1,\ldots,x_n$ bedeuten, die Grundkanten des Kreises k sind. Ist $\varepsilon=0$, so sei $|\varepsilon, k|=0$.

Das Kantensystem ε heißt *kreisaufnehmbar* bzw. *kreisfüllend*, wenn für jeden positiven Kreis k $|\varepsilon, k| \leqq \psi[k]$ bzw. $|\varepsilon, k| \geqq \psi[k]$ gilt.

Mit den oben eingeführten Begriffen können wir nun die angekündigte Umformung der Sätze (2.1.6) und (2.1.7) in folgender Weise durchführen. (Der Kürze wegen werden wir die Existenz der Extremwerte, die in unseren Sätzen vorkommen, von jetzt an nicht mehr explizit festsetzen, wohl aber wollen wir diese immer zu den Behauptungen der Sätze stillschweigend hinzunehmen.)

(3.1.4) SATZ. *Ist Γ endlich und ist $\varphi \geqq 0$, so ist das Maximum der ψ-Werte der kanteaufnehmbaren positiven Kreissysteme gleich dem Minimum der φ-Werte der kreisfüllenden Kantensysteme.*

(3.1.5) SATZ. *Ist Γ endlich und gilt für jeden positiven Kreis $\psi[k] \geqq 0$, ist ferner jede Kante x mit $\varphi(x) > 0$ in einem positiven Kreis enthalten, so ist das Minimum der ψ-Werte der kantefüllenden Kreissysteme gleich dem Maximum der φ-Werte der kreisaufnehmbaren Kantensysteme.*

3.2. Verallgemeinerung der Sätze (3.1.4) und (3.1.5)

Wir wollen unsere Sätze in solcher Richtung verallgemeinern, wo die Funktionen φ und ψ auch auf den Punkten des Graphen definiert sind. Wir müssen dann die Kantensysteme durch „Punktsysteme" bzw. durch „Punkt-Kantensysteme" ersetzen.

(3.2.1) Die *Punktsysteme* sind aus Punkten in gleicher Weise gebildet, wie die Kreis- und Kantensysteme aus Kreisen bzw. aus Kanten (s. (3.1.1)).

Ein Punktsystem π und ein Kantensystem ε bilden zusammen ein *Punkt-Kantensystem* $\gamma = (\pi, \varepsilon)$. Wir machen folgende Verabredungen: $(\pi, 0) = \pi$, $(0, \varepsilon) = \varepsilon$, $(0, 0) = 0$.

Zu den schon früher eingeführten „Inzidenzgraden" $|f, g|$, $|\varkappa, x|$ und $|\varepsilon, x|$ nehmen wir noch die folgenden hinzu:

Ist f eine beliebige Kette, so sei

$$|f, X| = \sum_x |f(x)|\,|(x, X)| = \frac{1}{2}\nu_X(f).$$

Wenn k ein Kreis ist, so ist $|k, X|$ gleich 1 oder 0, je nachdem ob X ein Punkt von k ist oder nicht.

Ist $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$ bzw. $\varkappa = 0$, so sei

$$|\varkappa, X| = \sum_{i=1}^{n} |k_i, X| \quad \text{bzw.} \quad |\varkappa, X| = 0.$$

$|\varkappa, X|$ gibt die Anzahl derjenigen Kreise der Folge $k_1, \ldots, k_n$ an, die den Punkt X enthalten.

Ist $\pi=(X_1,\ldots,X_n)$ ein Punktsystem und k ein Kreis, so sei $|\pi,k|$ die Anzahl derjenigen Punkte der Folge $X_1,\ldots,X_n$, die auf k liegen. Ist $\pi=0$, so sei $|\pi,k|=0$.

Ist $\gamma=(\pi,\varepsilon)$, so sei $|\gamma,k|=|\pi,k|+|\varepsilon,k|$. $|\gamma,k|$ bedeutet die gemeinsame Anzahl derjenigen Punkte und Kanten von γ, die zu k gehören.

(3. 2. 2) Es seien φ und ψ zwei ganzwertige Funktionen, die auf sämtlichen Punkten und Kanten des Graphen, d. h. auf der Menge $\Phi\cup\Psi$ definiert sind. Sind $X_1,\ldots,X_n$ und $e_1,\ldots,e_n$ die Punkte bzw. die Kanten des Kreises k, so wollen wir jetzt unter dem *ψ-Wert von k* den Wert

$$\psi[k]=\sum_{i=1}^{n}\psi(X_i)+\sum_{i=1}^{n}\psi[e_i]$$

verstehen. Ist $k=0$, so sei $\psi[k]=0$.

Für $\varkappa=(k_1,\ldots,k_n)$, $\pi=(X_1,\ldots,X_n)$ und $\gamma=(\pi,\varepsilon)$ sei $\psi[\varkappa]=\sum_{i=1}^{n}\psi[k_i]$, $\varphi[\pi]=\sum_{i=1}^{n}\varphi(X_i)$ und $\varphi[\gamma]=\varphi[\pi]+\varphi[\varepsilon]$.

Für $\varkappa=0$ und $\pi=0$ sei $\psi[\varkappa]=0$ und $\varphi[\pi]=0$.

Wir nennen ein Kreissystem $\varkappa$ *aufnehmbar* bzw. *füllend*, wenn für jedes X und x $|\varkappa,X|\leqq\varphi(X)$ und $|\varkappa,x|\leqq\varphi(x)$ bzw. $|\varkappa,X|\geqq\varphi(X)$ und $|\varkappa,x|\geqq\varphi(x)$ gilt.

Ein Punkt-Kantensystem γ heißt *kreisaufnehmbar* bzw. *kreisfüllend*, wenn für jeden *positiven* Kreis k $|\gamma,k|\leqq\psi[k]$ bzw. $|\gamma,k|\geqq\psi[k]$ gilt.

In (3. 2. 8) werden wir unter Benützung eines Gedankens von FORD und FULKERSON aus den Sätzen (3. 1. 4) und (3. 1. 5) die folgenden Verallgemeinerungen ableiten:

(3. 2. 3) SATZ. *Ist Γ endlich und gilt für jedes X und x $\varphi\geqq 0$, so ist das Maximum der ψ-Werte der aufnehmbaren positiven Kreissysteme gleich dem Minimum der φ-Werte der kreisfüllenden Punkt-Kantensysteme.*

(3. 2. 4) SATZ. *Ist Γ endlich und gilt für jeden positiven Kreis k die Ungleichung $\psi[k]\geqq 0$, gibt es ferner zu jedem Punkt X bzw. zu jeder Kante x mit $\varphi(X)>0$ bzw. $\varphi(x)>0$ einen positiven Kreis, der den Punkt bzw. die Kante enthält, so ist das Minimum der ψ-Werte der füllenden Kreissysteme gleich dem Maximum der φ-Werte der kreisaufnehmbaren Punkt-Kantensysteme.*

Man kann leicht einsehen: Gilt für jedes X $\varphi(X)=\infty$ (d. h. sind sämtliche $\varphi(X)$ Werte genügend groß), und für jedes X $\psi(X)=0$, so erhält man aus (3. 2. 3) den Satz (3. 1. 4). Ist für jedes X $\varphi(X)=0$ und $\psi(X)=0$, so ergibt (3. 2. 4) den Satz (3. 1. 5).

(3.2.5) Wegen der Anwendungen haben einige Spezialfälle von (3.2.3) und (3.2.4) besondere Bedeutung, und zwar bei (3.2.3) der Fall, wo für jedes x $\varphi(x)=\infty$ und für jedes X $\psi(X)=0$ ist, bei (3.2.4) der Fall, wo für jedes x $\varphi(x)=0$ und für jedes X $\psi(X)=0$ gilt. Wir wollen einige in diesen Fällen auftretende Vereinfachungen hervorheben.

Die Aussage, daß ein Kreissystem $\varkappa$ aufnehmbar bzw. füllend ist, bedeutet jetzt, daß $|\varkappa, X| \leqq \varphi(X)$ bzw. $|\varkappa, X| \geqq \varphi(X)$ für jeden Punkt X besteht. Wir werden ein solches Kreissystem *punktaufnehmbar* bzw. *punktfüllend* nennen.

Der ψ-Wert eines Kreises ergibt sich als die Summe der ψ-Werte seiner Kanten.

Bei der Aufsuchung des Minimums bzw. des Maximums der φ-Werte können wir uns auf kantenlose Punkt-Kantensysteme, d. h. einfach nur auf Punktsysteme beschränken. Ein Punktsystem π ist dann kreisfüllend bzw. kreisaufnehmbar, wenn für jedes positive k $|\pi, k| \geqq \psi[k]$ bzw. $|\pi, k| \leqq \psi[k]$ gilt.

Wir sehen so, daß in der Tat nur die zu den Punkten gehörigen φ-Werte bzw. zu den Kanten gehörigen ψ-Werte eine Rolle spielen, also *wir können uns auf solche Funktionen φ bzw. ψ beschränken, die nur auf Punkten bzw. Kanten* definiert sind. Mit solchen Funktionen formulieren wir die betrachteten Spezialfälle folgendermaßen:

(3.2.6) SATZ. *Ist Γ endlich und ist $\varphi \geqq 0$, so ist das Maximum der ψ-Werte der punktaufnehmbaren positiven Kreissysteme gleich dem Minimum der φ-Werte der kreisfüllenden Punktsysteme.*

(3.2.7) SATZ. *Ist Γ endlich und gilt $\psi[k] \geqq 0$ für jeden positiven Kreis k, gibt es ferner zu jedem Punkt X mit $\varphi(X) > 0$ einen positiven Kreis, der X enthält, so ist das Minimum der ψ-Werte der punktfüllenden positiven Kreissysteme gleich dem Maximum der φ-Werte der kreisaufnehmbaren Punktsysteme.*

(3.2.8) Wir beweisen nun die Sätze (3.2.3) und (3.2.4) dadurch, daß wir sie auf die Sätze (3.1.4) bzw. (3.1.5) zurückführen. Zu diesem Zwecke konstruieren wir, nach einem Verfahren von FORD und FULKERSON ([6], S. 212), aus Γ einen neuen Graphen Γ'. Die Konstruktion kann man kurz folgendermaßen beschreiben: Wir zerspalten einen jeden Punkt X von Γ in zwei Punkte X^- und X^+ und fügen die in X einlaufenden Kanten zu X^-, die von X auslaufenden zu X^+, ferner verbinden wir X^- mit X^+ durch eine neue, aus X^- nach X^+ laufende Kante y_X.

Aus den Funktionen φ und ψ, die auf den Punkten und Kanten des Graphen Γ definiert sind, bilden wir zwei neue Funktionen φ' und ψ', die nur auf den Kanten von Γ' definiert sind:

Ist x eine auch in Γ vorkommende Kante von Γ', so sei $\varphi'(x)=\varphi(x)$ und $\psi'(x)=\psi(x)$. Für eine neue Kante y_X sei $\varphi'(y_X)=\varphi(X)$ und $\psi'(y_X)=$ $=\psi(X)$.

Jeder positive Kreis von Γ' enthält mit einem Punkte X^- (bzw. X^+) den Punkt X^+ (bzw. X^-) und die Kante y_X. Dies ermöglicht uns, daß wir zwischen den positiven Kreisen und dementsprechend zwischen den positiven Kreissystemen der Graphen Γ und Γ' eine sich natürlicherweise ergebende ein-eindeutige Zuordnung errichten. Es ist leicht ersichtlich, daß bei dieser Zuordnung die entsprechenden Kreissysteme gleichzeitig aufnehmbar bzw. kanteaufnehmbar, sowie gleichzeitig füllend bzw. kantefüllend sind; ferner, daß die ψ- bzw. ψ'-Werte der entsprechenden Kreise einander gleich sind.

Gleichfalls kann man eine natürliche Zuordnung zwischen den Punkt-Kantensystemen von Γ und den Kantensystemen von Γ' errichten. Hier sind die entsprechenden Systeme gleichzeitig kreisaufnehmbar bzw. kreisfüllend, sowie besitzen sie gleiche φ- bzw. φ'-Werte.

Laut der obigen können wir nun feststellen: Der auf Γ' ausgesprochene Satz (3. 1. 4) bzw. (3. 1. 5) ergibt den auf Γ bezüglichen Satz (3. 2. 3) bzw. (3. 2. 4).

3. 3. Beliebige Kreissysteme

(3. 3. 1) Man kann einen zu (3. 2. 3) ähnlichen Satz auf beliebige — nicht nur positive Kreise enthaltende — Kreissysteme aussprechen. Wir wollen jedoch hier uns nur mit demjenigen Satz beschäftigen, der dem Spezialfall von (3. 2. 6) entspricht.

Es sei also φ bzw. ψ nur auf allen Punkten bzw. Kanten definiert. Wir untersuchen nun solche Punktsysteme π, die mit jedem — *nicht nur positiven* — Kreis k die Ungleichung $|\pi, k| \geqq \psi[k]$ erfüllen. Wir nennen diese Punktsysteme *b-kreisfüllend.*

Es besteht nun der folgende Satz:

(3. 3. 2) SATZ. *Ist Γ endlich und ist $\varphi \geqq 0$, so ist das Maximum der ψ-Werte der punktaufnehmbaren Kreissysteme gleich dem Minimum der φ-Werte der b-kreisfüllenden Punktsysteme.*

BEWEIS. Wir führen unseren Satz auf (3. 2. 6) zurück (s. [1], S. 217 und [6], S. 211). Durch Hinzunahme von neuen Kanten errichten wir aus Γ einen Graphen Γ' wie folgt: Wir nehmen zu jeder Kante $x=x(X'X'')$ von Γ eine neue Kante $\bar{x}=\bar{x}(X''X')$ mit $\psi(\bar{x})=-\psi(x)$ auf. Nennen wir einen Kreis, der aus zwei zueinander gehörigen Kanten x und $\bar{x}$ besteht, einen 0-Kreis, so hat jeder 0-Kreis den ψ-Wert Null. Lassen wir dann aus einem *positiven* punktaufnehmbaren Kreissystem $\varkappa'$ von Γ' die eventuell vorkommenden 0-Kreise weg, so bilden die zurückbleibenden Kreise ein *positives* punktaufnehmbares Kreissystem von Γ', das den gleichen ψ-Wert besitzt wie $\varkappa'$. Demzufolge können wir uns bei der Untersuchung des Maximums der ψ-Werte auf diejenigen positiven Kreissysteme beschränken, die keinen 0-Kreis enthalten.

Wenn man jedoch von den 0-Kreisen absieht, so kann man zwischen den *positiven* Kreisen von Γ' und *sämtlichen* Kreisen von Γ eine sich in natürlicher Weise ergebende ein-eindeutige Zuordnung errichten (man ersetze in jedem Kreis von Γ' eine jede neue Kante $\bar{x}$ durch $-x$). Bei dieser Zuordnung stimmen die Punkte und die ψ-Werte der entsprechenden Kreise überein. Durch die Zuordnung der Kreise entsteht eine solche ein-eindeutige Abbildung der 0-kreislosen, positiven Kreissysteme von Γ' auf sämtliche Kreissysteme von Γ, wo die entsprechenden Systeme gleichzeitig punktaufnehmbar sind und den gleichen ψ-Wert besitzen.

Anderseits kann man leicht einsehen, daß wenn ein Punktsystem in Γ' kreisfüllend ist, so es in Γ b-kreisfüllend ist — und umgekehrt.

Nach den obigen kann man nun feststellen: Der auf Γ' ausgesprochene Satz (3. 2. 6) ergibt den auf Γ bezüglichen Satz (3. 3. 2).

Bemerkung. Ähnlich wie der Satz (2. 1. 6) lassen sich auch die Sätze (3. 2. 3) und (3. 3. 2) auf unendliche Graphen ausdehnen.

§ 4

In diesem Paragraphen leiten wir einige Maximum-Minimum Sätze über Weg- und Kantensysteme ab. Wir erhalten diese Sätze dadurch, daß wir die Sätze (3. 2. 6) und (3. 2. 7) auf spezielle Graphen bzw. Bewertungen anwenden. Entsprechend den Sätzen (3. 2. 6) und (3. 2. 7) soll immer in § 4 die Funktion φ nur auf den Punkten, die Funktion ψ nur auf den Kanten definiert sein.

Wir bemerken, daß unser Verfahren auch auf die Sätze (3. 1. 4) und (3. 1. 5) bzw. (3. 2. 3) und (3. 2. 4) anwendbar ist.

4. 1. Wegsysteme

(4. 1. 1) Es sei Φ die Menge der Punkte des gerichteten Graphen Γ, Φ_α und Φ_β seien zwei — in § 4 festgehaltene — nichtleere, elementfremde Teilmengen von Φ. Wir werden die Punkte von Φ_α bzw. Φ_β *α-Punkte* bzw. *β-Punkte* nennen. ϱ sowie σ sollen im folgenden einen beliebigen der Buchstaben α und β bezeichnen. Ein Weg heißt $\varrho\sigma$-Weg, wenn sein Anfangspunkt

ein ϱ-Punkt, sein Endpunkt ein σ-Punkt ist, und wenn seine inneren Punkte weder α- noch β-Punkte sind.

Es sei w ein beliebiger Weg und X ein beliebiger Punkt. Der Wert des Zeichens $[w, X]$ soll gleich 1 oder 0 sein, je nachdem X auf w liegt oder nicht. (Der in (3. 2. 1) eingeführte Wert $|w, X|$ stimmt außer den Randpunkten von w mit $[w, X]$ überein, in den Randpunkten gilt jedoch $2|w, X| = [w, X]$.)

Unter einem *Wegsystem* $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$ verstehen wir eine solche Folge der *$\alpha\beta$-Wege* w_i, wo ein Weg auch mehrmals vorkommen kann. Systeme, die sich nur in der Reihenfolge ihrer Elemente unterscheiden, werden als gleich betrachtet. Die „leere Folge“ ($\omega = 0$) sei auch ein Wegsystem.

Das System ω heißt *positiv*, wenn alle seine Wege positiv sind, oder wenn $\omega = 0$ ist.

Es sei $[\omega, X] = \sum_{i=1}^{n} [w_i, X]$ bzw. $[\omega, X] = 0$, wenn $\omega = 0$ ist. $[\omega, X]$ bedeutet die Anzahl derjenigen Wege der Folge $w_1, \ldots, w_n$, die den Punkt X enthalten.

Ist $\pi = (X_1, \ldots, X_m)$ ein Punktsystem und w ein Weg, so sei $[\pi, w] = \sum_{i=1}^{m} [w, X_i]$. Ist $\pi = 0$, so sei $[\pi, w] = 0$. $[\pi, w]$ bedeutet die Anzahl derjenigen Punkte von π, die auf w liegen.

Ist $\pi = (X_1, \ldots, X_m)$ und $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$, so sei

$$[\pi, \omega] = \sum_{i=1}^{n} [\pi, w_i] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [w_i, X_j] = \sum_{j=1}^{m} [\omega, X_j].$$

Ist $\pi = 0$ oder $\omega = 0$, so sei $[\pi, \omega] = 0$.

Durch die Vereinigung der Wege der Systeme $\omega_1, \ldots, \omega_n$ entsteht ein neues System, das wir mit $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ bezeichnen wollen. Es gilt $[\omega, X] = \sum_{i=1}^{n} [\omega_i, X]$ für jeden beliebigen Punkt X.

(4. 1. 2) Es seien $\varphi(X)$ und $\psi(x)$ zwei ganzwertige Funktionen, die auf den Punkten bzw. Kanten des Graphen definiert sind.

Wir nennen das Wegsystem ω *punktaufnehmbar* bzw. *punktfüllend*, wenn für jedes X $[\omega, X] \leqq \varphi(X)$ bzw. $[\omega, X] \geqq \varphi(X)$ besteht. Die Menge der *positiven* punktaufnehmbaren bzw. punktfüllenden Wegsysteme bezeichnen wir mit Ω_a bzw. Ω_f.

Der *ψ-Wert des Wegsystems* $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$, $\psi[\omega]$ ist gleich der Summe der ψ-Werte der Wege w_i. (Der ψ-Wert eines Weges ist gleich der Summe der ψ-Werte seiner Kanten.) Ist $\omega = 0$, so sei $\psi[\omega] = 0$. Ist $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, so ist $\psi[\omega] = \sum_{i=1}^{m} \psi[\omega_i]$.

Ein Punktsystem π heißt *wegaufnehmbar* bzw. *wegfüllend*, wenn für jeden *positiven* $\alpha\beta$-Weg w die Ungleichung $[\pi, w] \leqq \psi[w]$ bzw. $[\pi, w] \geqq \psi[w]$ gilt. Gibt es keinen positiven $\alpha\beta$-Weg, so betrachten wir das Punktsystem $\pi = 0$ als wegfüllend.

Ist π wegaufnehmbar bzw. wegfüllend, so kann man leicht einsehen, daß für jedes *positive* Wegsystem ω $[\pi, \omega] \leqq \psi[\omega]$ bzw. $[\pi, \omega] \geqq \psi[\omega]$ gilt.

Wir bezeichnen die Menge der wegaufnehmbaren bzw. wegfüllenden Punktsysteme mit R_a bzw. R_f.

4. 2. Sätze über punktaufnehmbare Wegsysteme

In diesem Abschnitt spielen folgende Bedingungen eine Rolle:

(4. 2. 1) $\varphi \geqq 0$.

(4. 2. 2) (1) *Jeder positive $\beta\alpha$-, $\alpha\alpha$- und $\beta\beta$-Weg besitzt einen nichtpositiven ψ-Wert.*

(2) *Jeder positive Kreis besitzt — mit Ausnahme jener Kreise, die gleichzeitig α- und β-Punkte enthalten — einen nichtpositiven ψ-Wert.*

Es besteht nun der folgende Satz:

(4. 2. 3) SATZ. *Ist Γ endlich und bestehen die Bedingungen* (4. 2. 1) *und* (4. 2. 2), *so gilt*

$$\max_{\omega \in \Omega_a} \psi[\omega] = \min_{\pi \in R_f} \varphi[\pi].$$

BEWEIS. (I) Man kann aus unseren Bedingungen leicht einsehen, daß die Werte $\mu_1 = \max_{\omega \in \Omega_a} \psi[\omega]$ und $\bar{\mu}_1 = \min_{\pi \in R_f} \varphi[\pi]$ existieren. Den Beweis der Behauptung $\mu_1 = \bar{\mu}_1$ werden wir durch die Konstruktion eines neuen Graphen Γ' auf den Satz (3. 2. 6) zurückführen. Γ' entsteht aus Γ dadurch, daß wir einen jeden β-Punkt mit einem jeden α-Punkt durch je eine neue, von dem β-Punkt zu dem α-Punkt gerichtete Kante verbinden. Ferner soll jede neue Kante den ψ-Wert Null erhalten.

(II) Wir ordnen zu einem jeden positiven Kreis k von Γ' ein solches positives Wegsystem ω_k von Γ zu, für welches mit jedem X die Ungleichungen $[\omega_k, X] \leqq [k, X]$ und $\psi[\omega_k] \geqq \psi[k]$ bestehen.

Enthält k nicht gleichzeitig α- und β-Punkte, so kann k keine neue Kante enthalten, also ist k ein positiver Kreis von Γ und nach (4. 2. 2) (2) ist $\psi[k] \leqq 0$. Wir setzen jetzt $\omega_k = 0$.

Nehmen wir nun an, daß k gleichzeitig α- und β-Punkte enthält. Diese Punkte zerlegen den Kreis in sich einander anschließende positive Wege $v_1, \ldots, v_n$ $(n \geqq 2)$. Jeder Weg v_i ist entweder ein $\varrho\sigma$-Weg, oder er besteht aus einer einzigen neuen Kante. Nach unseren Annahmen kann also $\psi[v_i] > 0$ nur dann eintreten, wenn v_i ein $\alpha\beta$-Weg ist. Gibt es zwischen den v_i keinen $\alpha\beta$-Weg, so ist $\psi[k] = \sum_{i=0}^{n} \psi[v_i] \leqq 0$ und wir setzen dann $\omega_k = 0$. Sind einige v_i $\alpha\beta$-Wege, so wollen wir diese mit $w_1, \ldots, w_m$ bezeichnen. Wir setzen jetzt $\omega_k = (w_1, \ldots, w_m)$. Es gilt dann

$$\psi[\omega_k] = \sum_{i=1}^{m} \psi[w_i] \geqq \sum_{j=1}^{n} \psi[v_j] = \psi[k]$$

und es ist für jedes X $[\omega_k, X] \leqq |k, X|$, da w_i und w_j $(i \neq j)$ gemeinsame Punkte nicht enthalten können.

(III) Es sei $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$ ein nichtleeres, positives Kreissystem von Γ'. Wir ordnen zu $\varkappa$ das positive Wegsystem $\omega_\varkappa = (\omega_{k_1}, \ldots, \omega_{k_n})$ zu, wo ω_{k_i} jenes Wegsystem bezeichnet, das laut (II) zu k_i gehört. Ist $\varkappa = 0$, so sei $\omega_\varkappa = 0$. Mit Hilfe dieser Zuordnung beweisen wir die Ungleichung $\mu_1 \geqq \mu_1'$, wo $\mu_1' = \max_{\varkappa \in K_a'} \psi[\varkappa]$ ist, und K_a' die Menge der positiven, punktaufnehmbaren Kreissysteme von Γ' bezeichnet. Ist nämlich $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$ ein nichtleeres positives Kreissystem von Γ', so gilt

$$(*) \qquad \psi[\omega_\varkappa] = \sum_{i=1}^{n} \psi[\omega_{k_i}] \geqq \sum_{i=1}^{n} \psi[k_i] = \psi[\varkappa],$$

und für jeden Punkt X besteht

$$[\omega_\varkappa, X] = \sum_{i=1}^{n} [\omega_{k_i}, X] \leqq \sum_{i=1}^{n} |k_i, X| = |\varkappa, X|.$$

Ist weiterhin $\varkappa \in K_a'$, so gilt für jedes X $|\varkappa, X| \leqq \varphi(X)$, also gilt $[\omega_\varkappa, X] \leqq \varphi(X)$, d. h. $\omega_\varkappa \in \Omega_a$. Die gleichen Behauptungen treffen auch im Falle $\varkappa = 0$ zu. Aus $(*)$ und $\omega_\varkappa \in \Omega_a$ folgt nun $\mu_1 \geqq \mu_1'$.

(IV) Wir beweisen, daß $\mu_1 \leqq \mu_1'$ ist. Zu diesem Zwecke ergänzen wir einen jeden positiven $\alpha\beta$-Weg w von Γ zu einem positiven Kreis k_w von Γ'. Die Ergänzung erfolgt durch Hinzunahme derjenigen neuen Kante, die von dem Endpunkt zum Anfangspunkt des Weges w führt. Offenbar gelten die Gleichungen $\psi[k_w] = \psi[w]$, $|k_w, X| = [w, X]$ für jedes X.

Ist $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$ ein beliebiges, nichtleeres, positives Wegsystem, so sei $\varkappa_\omega = (k_{w_1}, \ldots, k_{w_n})$. Ist $\omega = 0$, so sei $\varkappa_\omega = 0$. Es bestehen die Gleichungen $\psi[\varkappa_\omega] = \psi[\omega]$, $|\varkappa_\omega, X| = [\omega, X]$ für jedes X. Man sieht, daß aus $\omega \in \Omega_a$ die Behauptung $\varkappa \in K_a'$ folgt. Aus den obenstehenden folgt nun $\mu_1 \leqq \mu_1'$.

(III) und (IV) ergeben die Gleichung $\mu_1 = \mu_1'$.

(V) Bezeichnen wir mit Π_f' die Menge der kreisfüllenden Punktsysteme von Γ'. Wir zeigen, daß $\Pi_f' = R_f$ ist.

Ist $\pi = (X_1, \ldots, X_n) \in R_f$ und ist k ein beliebiger positiver Kreis von Γ', so gilt mit den Bezeichnungen und nach den Behauptungen von (II)

$$|\pi, k| = \sum_{i=1}^{n} |k, X_i| \geqq \sum_{i=1}^{n} [\omega_k, X_i] = [\pi, \omega_k] \geqq \psi[\omega_k] \geqq \psi[k].$$

Es ist daher $\pi \in \Pi'_f$.

Ist umgekehrt $\pi = (X_1, \ldots, X_n) \in \Pi'_f$ und ist w ein beliebiger positiver $\alpha\beta$-Weg, so gilt mit den Bezeichnungen und nach den Behauptungen von (IV)

$$[\pi, w] = \sum_{i=1}^{n} [w, X_i] = \sum_{i=1}^{n} |k_w, X_i| = |\pi, k_w| \geqq \psi[k_w] = \psi[w].$$

Es ist daher $\pi \in R_f$.

(Die gleichen Behauptungen treffen auch im Falle $\pi = 0$ zu.)

Aus den obigen folgt $\Pi'_f = R_f$.

Nun folgt endlich aus (3. 2. 6), $\mu_1 = \mu'_1$ und $\Pi'_f = R_f$ der Satz (4. 2. 3).

Bemerkung. Durch Hinzunahme der folgenden Bedingungen kann man den Satz (4. 2. 3) auf unendliche Graphen übertragen:

(1) Die ψ-Werte der positiven, punktaufnehmbaren $\alpha\beta$-Wege sind von oben beschränkt.

(2) Die Anzahl der 0-Punkte ist endlich. (Ein Punkt heißt 0-Punkt, wenn $\varphi(X) = 0$ gilt.)

(3) Die ψ-Werte jener positiven $\alpha\beta$-Wege, die 0-Punkte enthalten, sind von oben beschränkt.

(4. 2. 4) Im folgenden wenden wir den Satz (4. 2. 3) auf einige spezielle Graphen bzw. ψ-Bewertungen an.

Ein gerichteter Graph heißt *azyklisch*, wenn er außer dem Kreis $k = 0$ keinen *positiven* Kreis enthält. Es gilt nun der folgende Satz:

(4. 2. 5) Satz. *Ist Γ endlich und azyklisch, treten ferner die α-Punkte nur als Anfangspunkte, die β-Punkte nur als Endpunkte von Kanten auf, so gilt mit jeder beliebigen ψ-Bewertung*

$$\max_{\omega \in \Omega_a} \psi[\omega] = \min_{\pi \in R_f} \varphi[\pi],$$

vorausgesetzt, daß $\varphi \geqq 0$ ist.

Der Graph kann nämlich keinen positiven $\beta\alpha$-, $\alpha\alpha$- und $\beta\beta$-Weg, und außer $k = 0$ keinen positiven Kreis enthalten. Die Bedingungen (4. 2. 2) sind daher erfüllt.

Ist der Anfangspunkt einer jeden Kante ein α-Punkt und der Endpunkt ein β-Punkt, so liegt ein spezieller Fall von (4. 2. 5) vor. Es ist jetzt Γ ein *paarer* Graph ([13], S. 170) und die positiven $\alpha\beta$-Wege reduzieren sich auf

Kanten, die positiven Wegsysteme auf Kantensysteme. Man kann ferner den Satz auch auf ungerichtete Graphen aussprechen.

(4. 2. 6) Betrachten wir einen *ungerichteten* Graphen und es seien auf dessen Punkten bzw. Kanten die ganzwertigen Funktionen $\varphi(X)$ bzw. $\psi(x)$ definiert. Ist $\varepsilon = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Kantensystem, so sei $\psi[\varepsilon] = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i)$. Ist $\varepsilon = 0$, so sei $\psi[\varepsilon] = 0$.

Wir nennen das *Kantensystem* ε *1-aufnehmbar* bzw. *1-füllend,* wenn für jeden Punkt X die Anzahl derjenigen Kanten von ε, die zu X inzident sind, nicht größer bzw. nicht kleiner als $\varphi(X)$ ist. Ferner heißt das *Punktsystem* π *1-aufnehmbar* bzw. *1-füllend,* wenn für jede Kante x die Anzahl derjenigen Punkte von π, die zu x inzident sind, nicht größer bzw. nicht kleiner als $\psi(x)$ ist.

Nach (4. 2. 5) kann man nun folgenden Satz formulieren (s. [6], S. 214—218):

(4. 2. 7) SATZ. *Bei jedem ungerichteten, endlichen paaren Graphen ist das Maximum der ψ-Werte der 1-aufnehmbaren Kantensysteme gleich dem Minimum der φ-Werte der 1-füllenden Punktsysteme, vorausgesetzt, daß $\varphi \geqq 0$ gilt.*

Im Falle $\varphi = 1$ ergibt (4. 2. 7) den in der Einleitung erwähnten Egerváryschen Satz.

(4. 2. 8) Es seien jetzt der Graph und die Mengen Φ_α und Φ_β beliebig, die Funktion $\psi(x)$ soll jedoch folgendermaßen gewählt werden: Sind beide Randpunkte einer Kante x α-Punkte, oder ist kein Randpunkt von x ein α-Punkt, so sei $\psi(x) = 0$. Ist nur der Anfangspunkt bzw. der Endpunkt von x ein α-Punkt, so sei $\psi(x) = 1$ bzw. $\psi(x) = -1$.

Es folgt aus diesen Bedingungen, daß die ψ-Werte der positiven $\alpha\beta$-, $\beta\alpha$-, $\alpha\alpha$-, $\beta\beta$-Wege, in dieser Reihenfolge, gleich $1, -1, 0, 0$ sind, und daß für jeden positiven Kreis k $\psi[k] = 0$ gilt. Daraus folgt jedoch, daß $\psi(x)$ den Bedingungen (4. 2. 2) genügt.

Ist weiterhin $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$ ein positives Wegsystem, so gilt $\psi[\omega] = \sum_{i=1}^{n} \psi[w_i] = n$. $\psi[\omega]$ gibt also die *Weganzahl* von ω an.

Ein Punktsystem π ist jetzt dann und nur dann wegfüllend, wenn jeder positive $\alpha\beta$-Weg *mindestens* einen Punkt von π enthält. Nach (4. 2. 3) gilt nun der folgende Satz:

(4. 2. 9) SATZ. *Ist der Graph endlich und gilt $\varphi \geqq 0$, so ist das Maximum der Weganzahlen der punktaufnehmbaren positiven Wegsysteme gleich dem Minimum der φ-Werte der wegfüllenden Punktsysteme.*

Dieser Satz ist im wesentlichen einem Falle des „max-flow min-cut" Satzes gleich (s. [1], [6]).

Ist $\varphi = 1$, so ergibt (4. 2. 9) den auf gerichtete Graphen formulierten Mengerschen Satz ([7], S. 188).

BEMERKUNG. Die in (4. 2. 9) nicht enthaltenen Fälle des „max-flow min-cut" Satzes ([1], [5], [6], [7]) kann man aus dem Satz (3. 2. 3) und aus den unter (3. 3. 1) bzw. (4. 2. 10) erwähnten Sätzen herleiten.

(4. 2. 10) Von (3. 3. 2) ausgehend kann man einen dem Satze (4. 2. 3) ähnlichen Satz erhalten, in dem die Positivität der Wege nicht verlangt wird. Wir können die in (4. 2. 8) definierte ψ-Funktion auch hier anwenden. Auf diese Weise kann man zu dem auf ungerichtete Graphen bezüglichen „max-flow min-cut" Satz und zu dem Mengerschen Satz ([14], S. 222) gelangen.

4. 3. Sätze über punktfüllende Wegsysteme

Ähnlich wie den Satz (4. 2. 3) kann man mit Hilfe von (3. 2. 7) den folgenden Satz beweisen:

(4. 3. 1) SATZ. *Ist Γ endlich und azyklisch, kommen ferner die α-Punkte nur als Anfangspunkte, die β-Punkte nur als Endpunkte von Kanten vor, sind schließlich die ψ-Werte der positiven $\alpha\beta$-Wege nicht negativ, so gilt*

$$\min_{\omega \in \Omega_f} \psi[\omega] = \max_{\pi \in R_a} \varphi[\pi],$$

vorausgesetzt, daß Ω_f nicht leer ist.

Wir heben zwei Spezialfälle von (4. 3. 1) hervor.

(4. 3. 2) Γ soll nur α- und β-Punkte enthalten. Der Graph ist dann *paarer* und an die Stelle der Wegsysteme treten Kantensysteme. Ähnlich wie bei (4. 2. 5) kann man jetzt wieder den Satz auf ungerichtete Graphen formulieren (s. (4. 2. 6) und [6], S. 214—218):

(4. 3. 3) SATZ. *Bei jedem endlichen, ungerichteten paaren Graphen ist das Minimum der ψ-Werte der 1-füllenden Kantensysteme gleich dem Maximum der φ-Werte der 1-aufnehmbaren Punktsysteme, vorausgesetzt, daß $\psi \geqq 0$ gilt.*

Daß überhaupt ein 1-füllendes Kantensystem existiert, folgt jetzt aus der Annahme (2) des Abschnittes 1. 1.

Derjenige Fall von (4. 3. 3), wo $\varphi = 1$ und $\psi = 1$ ist, stammt von D. KÖNIG (mündliche Mitteilung, 1932).

(4. 3. 4) Der Graph soll nur die in (4. 3. 1) gestellten Bedingungen erfüllen. Wir definieren die Funktion ψ folgendermaßen: für jede Kante x, die von einem α-Punkt ausläuft, sei $\psi(x)=1$, für jede andere Kante x sei $\psi(x)=0$. Ist jetzt w ein positiver $\alpha\beta$-Weg, so gilt $\psi[w]=1$ und daher gibt $\psi[\omega]$ die Weganzahl des Systems ω an. Ein Punktsystem π ist dann und nur dann wegaufnehmbar, wenn jeder positive $\alpha\beta$-Weg *höchstens* einen Punkt von π enthält. Nach (4. 3. 1) gilt nun der folgende Satz:

(4. 3. 5) SATZ. *Ist Γ endlich und azyklisch und treten die α-Punkte nur als Anfangspunkte, die β-Punkte nur als Endpunkte von Kanten auf, so ist das Minimum der Weganzahlen der punktfüllenden positiven Wegsysteme gleich dem Maximum der φ-Werte der wegaufnehmbaren Punktsysteme, vorausgesetzt, daß irgendein positives punktfüllendes Wegsystem existiert.*

Ist $\varphi=1$, so gibt (4. 3. 5) einen von DILWORTH stammenden, sich auf halbgeordnete Mengen beziehenden Satz für endliche Mengen an ([2], S. 161, 1. 1).

4. 4. Weitere Sätze über ungerichtete Graphen

(4. 4. 1) In Abschnitt 4. 4 sollen folgende Annahmen gelten:

Γ sei ein *ungerichteter, endlicher* Graph, $\varphi(X)$ und $\psi(x)$ seien ganzwertige, *nichtnegative* Funktionen, die auf den Punkten bzw. auf den Kanten von Γ definiert sind. Unter Ketten wollen wir nur *positive* Ketten, d. h. nur nichtnegative, ganzwertige Funktionen $f(x)$ verstehen.

(4. 4. 2) Wir definieren die Begriffe „x ist eine Kante von f", „die Anzahl der Kanten von f", „die Anzahl der zu X inzidenten Kanten von f", „ein zu f gehöriger Punkt" wie in (1. 2. 4), die Zeichen $\psi[f]$ und $|f, X|$ wie in (2. 1. 2) bzw. (3. 2. 1).

Wir heben hervor, daß $|f, X|$ die *halbe* Zahl der zu X inzidenten Kanten von f bedeutet. Die volle Anzahl der zu X inzidenten Kanten von f heißt *der Grad von X in f.* Ist der Grad gerade, so ist $|f, X|$ eine ganze Zahl, ist er ungerade, so ist $|f, X|$ eine halbe Zahl. Bezeichnet $\sum\limits_X$ die Summation nach sämtlichen Punkten des Graphen, so folgt aus

$$\sum_X |f, X| = \sum_X \sum_x f(x)\,(x, X) = \sum_x f(x)\,(\sum_X (x, X)) = \sum_x f(x),$$

daß für jede beliebige Kette f die Anzahl derjenigen Punkte, die in f einen ungeraden Grad besitzen, gerade ist.

Wir nennen jetzt eine Kette f *geschlossen* (Zyklus), wenn sie keinen Punkt ungeraden Grades (in f) enthält.

Gibt es zu der Kette f eine Folge $X_0 x_1 X_1 \ldots X_{n-1} x_n X_n$ $(n \geqq 1)$ mit lauter verschiedenen Punkten, und sind X_{i-1} und X_i die Randpunkte von x_i $(i = 1, \ldots, n)$, gilt ferner $f(x_i) = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $f(x) = 0$, wenn x mit keiner der x_i zusammenfällt, so heißt f ein *Weg*. $X_0 x_1 X_1 \ldots X_{n-1} x_n X_n$ ist eine zu f gehörige Folge, X_0 und X_n sind die Randpunkte von f.

Die *geschlossene* Kette k wollen wir einen *Kreis* nennen, wenn entweder $k = 0$ ist, oder wenn es eine solche Kante x gibt, für die $f = k - x$ ein Weg ist. Nach dieser Definition ist auch eine solche Kette $f(x)$ ein Kreis, die eine Kante x' mit $f(x') = 2$ enthält und für die $f(x) = 0$ für $x \neq x'$ ist. Einen solchen Kreis werden wir eine *zweifache Kante* nennen.

Dem Satz (1. 2. 7) entsprechende folgende Behauptung kann man leicht durch Induktion beweisen:

(4. 4. 3) *Jede geschlossene Kette kann man als Summe von Kreisen darstellen.*

Durch eine einfache Schlußweise, die dem Beweis von (1. 2. 9) ähnlich ist, gelangt man aus (4. 4. 3) zum folgenden Satz:

(4. 4. 4) *Jede ungeschlossene Kette f kann man als Summe von einer geschlossenen Kette und von solchen Wegen, die keine gemeinsame Randpunkte haben, darstellen. Jeder Weg verbindet zwei solche Punkte, die in f ungeraden Grad besitzen.*

(4. 4. 5) Wir nennen die Kette f *punktaufnehmbar* bzw. *punktfüllend*, wenn für jedes X $|f, X| \leqq \varphi(X)$ bzw. $|f, X| \geqq \varphi(X)$ gilt. Wir bezeichnen die Menge der punktaufnehmbaren bzw. punktfüllenden Ketten mit F_a bzw. F_f, die Menge der punktaufnehmbaren bzw. punktfüllenden *geschlossenen* Ketten mit G_a bzw. G_f $(G_a \subset F_a,\ G_f \subset F_f)$.

(4. 4. 6) *Es gilt*

$$\max_{f \in F_a} \psi[f] = \max_{g \in G_a} \psi[g].$$

Beweis. Die Existenz der Maximumwerte kann man leicht einsehen, und so genügt es nur zu zeigen, daß es zu jedem f von F_a ein g von G_a mit $\psi[g] \geqq \psi[f]$ gibt.

Es sei f ein beliebiges Element von F_a. Ist f geschlossen, so ist unsere Behauptung trivial. Ist f nicht geschlossen, so betrachten wir eine dem Satz (4. 4. 4) entsprechende Darstellung $f = g' + \sum_{i=1}^{m} f_i$ (g' ist geschlossen, die f_i sind Wege ohne gemeinsame Randpunkte $(m \geqq 1)$).

Wir wollen jeden Weg f_i durch eine geschlossene Kette g_i ersetzen. Betrachten wir nun einen Weg f_i und es sei $X_0 x_1 X_1 \ldots X_{n-1} x_n X_n$ eine zu f_i

gehörige Folge. Wir konstruieren folgende Summen:

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^{r} \psi(x_{2j-1}) \qquad (n-1 \leqq 2r-1 \leqq n),$$

$$\psi_2 = \sum_{j=1}^{s} \psi(x_{2j}) \qquad (n-1 \leqq 2s \leqq n).$$

Die Definition von g_i lautet: Ist $\psi_1 \geqq \psi_2$, so sei $g_i(x_{2j-1}) = 2$ $(j=1,\ldots,r)$, und für jede andere Kante x sei $g_i(x)=0$. Ist $\psi_1 < \psi_2$, so sei $g_i(x_{2j}) = 2$ $(j=1,\ldots,s)$, und für jede andere Kante x sei $g_i(x)=0$.

Wie ersichtlich, ist g_i geschlossen und es gilt $\psi[g_i] \geqq \psi[f_i]$. Außerdem besteht $|g_i, X| = |f_i, X|$ für jedes X mit Ausnahme von X_0 und X_n und es gelten

$$|g_i, X_0| = |f_i, X_0| \pm \frac{1}{2}, \qquad |g_i, X_n| = |f_i, X_n| \pm \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt ($\varphi(x)$ ist ganzwertig!), daß die Kette $g = g' + \sum_{i=1}^{m} g_i$ ein Element von G_a ist und $\psi[g] \geqq \psi[f]$ gilt.

Ähnlicherweise kann man auch die folgende Behauptung beweisen:

(4.4.7) *Es gilt*

$$\min_{f \in F_f} \psi[f] = \min_{g \in G_f} \psi[g].$$

(4.4.8) Wir nennen ein Punktsystem π *2-aufnehmbar* bzw. *2-füllend,* wenn die *halbe* Anzahl der Punkte von π, die zu einer jeden Kante x inzident sind, nicht größer bzw. nicht kleiner als $\psi(x)$ ist.

Unter Berücksichtigung der zweifachen Kanten kann man leicht einsehen, daß ein Punktsystem π dann und nur dann 2-aufnehmbar bzw. 2-füllend ist, wenn es „kreisaufnehmbar" bzw. „kreisfüllend" ist, d. h. wenn für jeden beliebigen Kreis k $|\pi, k| \leqq \psi[k]$ bzw. $|\pi, k| \geqq \psi[k]$ gilt, wo $|\pi, k|$ die Anzahl der auf k liegenden Punkte von π bedeutet.

Bezeichnen wir mit Π_a bzw. Π_f die Menge der 2-aufnehmbaren bzw. 2-füllenden Punktsysteme, so können wir den folgenden Satz aussprechen:

(4.4.9) *Es gilt*

$$\max_{g \in G_a} \psi[g] = \min_{\pi \in \Pi_f} \varphi[\pi].$$

Beweis. Bilden wir aus Γ den gerichteten Graphen Γ' in solcher Weise, daß wir zu einer jeden Kante x von Γ je eine neue Kante $\bar{x}$ mit den gleichen Randpunkten hinzunehmen und dann x und $\bar{x}$ mit entgegengesetzten Richtungen versehen (s. [1], S. 217 und [6], S. 211). Es sei $\psi(\bar{x}) = \psi(x)$. Man kann in natürlicher Weise zu jedem Kreis k von Γ je einen *positiven*

Kreis k' von Γ' mit den gleichen Punkten und mit dem gleichen ψ-Wert zuordnen — und umgekehrt. Mit Hilfe dieser Zuordnungen und (4. 4. 3) kann man zu einem jeden Element von G_a ein den gleichen ψ-Wert besitzendes, punktaufnehmbares positives Kreissystem von Γ' konstruieren — und umgekehrt. Man kann ferner leicht nachweisen, daß die Punktsysteme in Γ und in Γ' gleichzeitig kreisfüllend sind oder nicht.

Nach den obigen Behauptungen können wir nun feststellen: Der auf Γ' angewendete Satz (3. 2. 6) ergibt den auf Γ ausgesprochenen Satz (4. 4. 9).

Ähnlicherweise kann man aus (3. 2. 7) den folgenden Satz ableiten:

(4. 4. 10) *Es gilt*

$$\min_{g \in G_f} \psi[g] = \max_{\pi \in \Pi_a} \varphi[\pi].$$

(4. 4. 11) Wir nennen das *Kantensystem* $\varepsilon = (x_1, \ldots, x_n)$ *2-aufnehmbar* bzw. *2-füllend,* wenn für einen jeden Punkt X die *halbe* Zahl der Kanten von ε, die zu X inzident sind, nicht größer bzw. nicht kleiner als $\varphi(X)$ ist. Diese Kantensysteme entsprechen offensichtlich den punktaufnehmbaren bzw. punktfüllenden Ketten.

Nach (4. 4. 6) und (4. 4. 9) bzw. nach (4. 4. 7) und (4. 4. 10) können wir dann die folgenden Sätze aussprechen:

(4. 4. 12) SATZ. *Das Maximum der ψ-Werte der 2-aufnehmbaren Kantensysteme ist gleich dem Minimum der φ-Werte der 2-füllenden Punktsysteme.*

(4. 4. 13) SATZ. *Das Minimum der ψ-Werte der 2-füllenden Kantensysteme ist gleich dem Maximum der φ-Werte der 2-aufnehmbaren Punktsysteme.*

BEMERKUNG. Man kann die Sätze (4. 4. 9) und (4. 4. 12) bzw. (4. 4. 10) und (4. 4. 13) auch aus dem Satz (4. 2. 7) bzw. (4. 3. 3) ableiten.

§ 5

Als Anwendung der gewonnenen Maximum-Minimum Sätze leiten wir in diesem Paragraphen einige Bedingungen für die Existenz von speziellen Faktoren gerichteter und ungerichteter, endlicher Graphen ab.

5. 1. 1-Faktoren von gerichteten, endlichen Graphen

(5. 1. 1) Es sei Γ ein *gerichteter, endlicher* Graph, der N Punkte enthält. Unter einem 1-*Faktor* von Γ verstehen wir ein positives Kreissystem mit folgender Eigenschaft: Durch jeden Punkt von Γ geht ein und nur ein Kreis des Systems ([16], S. 922).

Die gesamte Anzahl der Kanten, die zu den Kreisen eines 1-Faktors gehören, ist gleich N.

Definieren wir die Funktionen $\varphi(X)$ und $\psi(x)$ so, daß für jeden Punkt X bzw. für jede Kante x $\varphi(X)=1$ bzw. $\psi(x)=1$ gelte, so ist ein positives Kreissystem $\varkappa$ dann und nur dann punktaufnehmbar bzw. punktfüllend, wenn durch jeden Punkt höchstens bzw. mindestens ein Kreis des Systems geht. Ferner gibt der ψ-Wert des Systems die Summe der Anzahlen der Punkte der zu dem System gehörigen Kreise an, da die Anzahl der Punkte eines Kreises der Anzahl seiner Kanten gleich ist. Daraus folgt, daß Γ dann und nur dann einen 1-Faktor besitzt, wenn das Maximum der ψ-Werte der punktaufnehmbaren positiven Kreissysteme, oder das Minimum der ψ-Werte der punktfüllenden positiven Kreissysteme gleich N ist. Da jetzt $\varphi[\pi]$ die Zahl der Punkte des Punktsystems π angibt, kann man nach (3. 2. 6) und (3. 2. 7) folgenden — zwei duale Behauptungen enthaltenden — Satz aussprechen:

(5. 1. 2) SATZ. *Ein gerichteter, endlicher Graph mit N Punkten besitzt dann und nur dann einen 1-Faktor, wenn es zu einer jeden Folge $X_1, \ldots, X_n$, die weniger (bzw. mehr) als N Punkte enthält ($n \geqq 1$; derselbe Punkt kann in der Folge mehrmals auftreten), einen solchen positiven Kreis gibt, der von der Folge weniger (bzw. mehr) Elemente enthält, als die Anzahl der Punkte des Kreises ausmacht.*

(5. 1. 3) Aus (5. 1. 2) beweisen wir folgenden Satz von ORE ([15], S. 405, Theorem 2. 3. 2):

Jeder reguläre, gerichtete, endliche Graph besitzt einen 1-Faktor.

Einen gerichteten Graphen nennt man *regulär,* wenn für jeden Punkt die Anzahl der auslaufenden Kanten, sowie die Anzahl der einlaufenden Kanten die gleiche Zahl j ist ($j \geqq 1$).

Die Kette $z_0 = 1$, die jede Kante des Graphen mit der Multiplizität 1 enthält, ist jetzt ein positiver Zyklus. Betrachten wir nun eine Zerlegung von z_0 in positive Kreise k_i: $z_0 = k_1 + \cdots + k_m$ ($m \geqq 1, k_i \neq 0$ $(i=1, \ldots, m)$). Es gehen dann durch jeden Punkt genau j Kreise von $k_1, \ldots, k_m$. Bezeichnet $\nu(k_i)$ auch ferner die Anzahl der Kanten bzw. der Punkte von k_i und $|\pi, k_i|$ die Anzahl derjenigen Punkte eines Systems $\pi = (X_1, \ldots, X_n)$, die auf k_i liegen, so bestehen folgende Gleichungen:

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{m} |\pi, k_i| = jn, \quad \sum_{i=1}^{m} \nu(k_i) = jN,$$

da jeder Punkt in den linksstehenden Summen genau j-mal vorkommt.

Gilt daher $|\pi, k_i| \geqq \nu(k_i)$ für $i=1, \ldots, m$, so folgt aus $(*)$, daß $n \geqq N$ ist. Wenn also $n < N$ ist, so muß ein Kreis k_i existieren, für den $|\pi, k_i| < \nu(k_i)$ gilt. Daraus folgt aber nach (5. 1. 2), daß der Graph einen 1-Faktor besitzt.

5. 2. Q-Faktoren von ungerichteten, endlichen Graphen

(5. 2. 1) Es sei Γ ein *endlicher, ungerichteter* Graph, der N Punkte besitzt. Unter einem *Q-Faktor* von Γ verstehen wir ein solches Kreissystem von Γ, bei dem durch jeden Punkt von Γ ein und nur ein Kreis des Systems geht. Dabei wird eine durch eine einzige Kante repräsentierte „zweifache Kante" als Kreis betrachtet ([16], S. 930).

Es sei $\varkappa$ ein beliebiger Q-Faktor. Nehmen wir die Kanten derjenigen Kreise von $\varkappa$, die mehr als zwei Punkte enthalten, je einmal, und diejenigen Kanten, welche die in $\varkappa$ vorkommenden zweifachen Kanten repräsentieren, je zweimal in einer Folge an. So erhalten wir ein solches Kantensystem, bei dem zu jedem Punkt von Γ genau zwei Kanten des Systems inzident sind. Umgekehrt kann man jedes solche Kantensystem in der angedeuteten Weise aus einem Q-Faktor herleiten. Es ist klar, daß in den erwähnten Kantensystemen die Anzahl der Kanten gleich N ist.

Es seien wieder $\varphi(X) \equiv 1$ und $\psi(x) \equiv 1$. In diesem Falle ist ein Kantensystem ε dann und nur dann 2-aufnehmbar bzw. 2-füllend, wenn zu jedem Punkt höchstens bzw. mindestens *zwei* Kanten von ε inzident sind. Ferner gibt $\psi[\varepsilon]$ die Anzahl der Kanten von ε an.

Daraus folgt, daß Γ dann und nur dann einen Q-Faktor besitzt, wenn das Maximum bzw. das Minimum der Kantenanzahl der 2-aufnehmbaren bzw. 2-füllenden Kantensysteme gleich N ist. Da $\varphi[\pi]$ wieder die Anzahl der Punkte des Punktsystems π angibt, kann man aus (4. 4. 12) und (4. 4. 13) folgenden, zwei duale Behauptungen enthaltenden, Satz ableiten:

(5. 5. 2) SATZ. *Ein ungerichteter, endlicher Graph mit N Punkten besitzt dann und nur dann einen Q-Faktor, wenn zu jeder Folge $X_1, \ldots, X_n$, die weniger (bzw. mehr) als N Punkte enthält ($n \geqq 1$; derselbe Punkt kann in der Folge mehrmals vorkommen), eine solche Kante existiert, zu der weniger (bzw. mehr) als zwei Punkte der Folge inzident sind.*

(5. 2. 3) Wir zeigen, daß aus (5. 2. 2) ein Tuttescher Satz über Q-Faktoren folgt ([16], S. 930):

Ein endlicher, ungerichteter Graph soll ein $\bar{Q}$-Graph heißen, wenn zwei Teilmengen Φ_1 und Φ_2 der Punkte von Γ existieren, die folgende Eigenschaften besitzen:

(1) Φ_1 und Φ_2 haben keinen gemeinsamen Punkt.

(2) Φ_1 enthält mehr Punkte als Φ_2.

(3) Gehört der eine Randpunkt einer Kante zu Φ_1, so gehört der andere zu Φ_2.

Nun besagt der Tuttesche Satz:

Ein endlicher Graph besitzt dann und nur dann einen Q-Faktor, wenn er kein $\bar{Q}$*-Graph ist.*

BEWEIS. Es bezeichne N die Zahl der Punkte des Graphen Γ.

(I) Wir nehmen zuerst an, daß ein solches, weniger als N Punkte enthaltendes Punktsystem existiert, bei dem jede Kante von Γ mindestens zu zwei Punkten des Systems inzident ist. Es sei $\pi = (X_1, \ldots, X_n)$ ein solches System *mit minimaler Anzahl von Punkten.*

Es existieren Punkte, die in π nicht vorkommen. Bezeichnen wir diese mit $U_1, \ldots, U_r$ $(r \geqq 1)$. Ist der eine der Randpunkte einer Kante ein Punkt U_i, so muß der andere in π mindestens zweimal vorkommen. Aus der Minimaleigenschaft von n folgt, daß in π kein Punkt mehr als zweimal vorkommen kann. Bezeichnen wir dann die in π zweimal vorkommenden Punkte mit $V_1, \ldots, V_s$, und die Anzahl derjenigen Punkte, die in π nur einmal vorkommen, mit t. So gilt $n = 2s + t$ und wir erhalten aus $n < N$ und $r + s + t = N$ die Ungleichung $s < r$. Die Mengen $\Phi_1 = (U_1, \ldots, U_r)$ und $\Phi_2 = (V_1, \ldots, V_s)$ genügen demnach den Bedingungen (1), (2), (3), Γ ist also ein $\bar{Q}$-Graph.

(II) Umgekehrt nehmen wir jetzt an, daß Γ ein $\bar{Q}$-Graph ist und es seien $\Phi_1 = (U_1, \ldots, U_r)$ und $\Phi_2 = (V_1, \ldots, V_s)$ zwei, den Bedingungen (1), (2), (3) genügende Mengen.

Bezeichnen wir jene Punkte, die weder in Φ_1 noch in Φ_2 vorkommen, mit $X_1, \ldots, X_t$. Existieren solche Punkte nicht, so sei $t = 0$. Die Zahl der Punkte des Systems $\pi = (V_1, \ldots, V_s, V_1, \ldots, V_s, X_1, \ldots, X_t)$ ist $n = 2s + t < r + s + t = N$. Offensichtlich sind nun zu jeder Kante von Γ mindestens zwei Punkte von π inzident.

Aus (I), (II) und (5. 2. 2) folgt der Tuttesche Satz.

(5. 2. 4) Man kann ähnlich wie unter (5. 1. 3) aus (5. 2. 2) den folgenden Satz beweisen:

Jeder endliche, ungerichtete, reguläre Graph besitzt einen Q-Faktor.

Ein ungerichteter Graph heißt *regulär*, wenn zu jedem seiner Punkte gleichviele Kanten inzident sind.

Wir bemerken noch, daß der letzte Satz auch aus dem bekannten Petersenschen Satz, laut dessen jeder endliche, reguläre Graph geraden Grades einen Faktor zweiten Grades besitzt, folgt (s. [13], S. 161).

§ 6

In diesem Paragraphen wollen wir die Sätze (2. 1. 6) und (2. 1. 7) mit Hilfe des Dualitätssatzes der Theorie der linearen Programmierung ([11], S. 58—65) ableiten.

(6. 1) Wir führen zuerst geeignete Bezeichnungen ein. Es seien die Punkte bzw. die Grundkanten des gerichteten, endlichen Graphen Γ $X_1, \ldots, X_m$ bzw. $x_1, \ldots, x_n$. Wir setzen $(x_i, X_j) = \frac{1}{2} a_{ij}$. (Die Größen a_{ij} können nur die Werte 0, 1, -1 annehmen. Die Matrix $[a_{ij}]$ ist die „Kante-Punkt" Inzidenzmatrix von Γ.)

Ist f eine beliebige Kette, so sei $f_i = f(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Wir können die Kette f durch den Vektor $f = [f_1, \ldots, f_n]$ ersetzen. f ist positiv, wenn $f_i \geqq 0$ ist $(i = 1, \ldots, n)$. Es ist

$$(f, X_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

und eine Kette z ist dann ein Zyklus, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} z_i = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

besteht.

Es seien $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $\psi_i = \psi(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dann gelten

$$\varphi[f] = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i f_i, \qquad \psi[z] = \sum_{i=1}^{n} \psi_i z_i.$$

Der positive Zyklus z ist kanteaufnehmbar bzw. kantefüllend, wenn $z_i \leqq \varphi_i$ bzw. $z_i \geqq \varphi_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ besteht.

Für den Inzidenzgrad der positiven Ketten f und z gilt

$$|f, z| = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i.$$

Die positive Kette f ist kreisaufnehmbar bzw. kreisfüllend, wenn für jeden positiven Zyklus z $|f, z| \leqq \psi[z]$ bzw. $|f, z| \geqq \psi[z]$ gilt (s. (2. 1. 3)).

(6. 2) Um den Satz (2. 1. 6) zu behandeln, verzichten wir vorläufig auf die Ganzzahligkeit der vorkommenden Werte. Dann bedeutet die Bestimmung der maximalen ψ-Wert besitzenden, positiven, kanteaufnehmbaren Zyklen die Aufsuchung derjenigen Zahlensysteme $z_1, \ldots, z_n$, die den linearen Ausdruck

(1) $$\psi_1 z_1 + \cdots + \psi_n z_n$$

maximal machen, während sie folgende Bedingungen erfüllen:

(2) $$z_1 \leqq \varphi_1, \ldots, z_n \leqq \varphi_n;$$

(3) $$\begin{aligned} a_{11} z_1 + \cdots + a_{n1} z_n &= 0, \\ \vdots \qquad\qquad & \;\; \vdots \\ a_{1m} z_1 + \cdots + a_{nm} z_n &= 0; \end{aligned}$$

(4) $$z_1 \geqq 0, \ldots, z_n \geqq 0.$$

Dies ist ein lineares Programmierungsproblem mit *gemischten* Bedingungen.

Zu diesem „ursprünglichen“ Problem gehört das folgende „duale“ Problem (s. [11], S. 63):

Man soll diejenigen Zahlensysteme $f_1, \dots, f_n, s_1, \dots, s_m$ bestimmen, die den linearen Ausdruck

$$\varphi_1 f_1 + \cdots + \varphi_n f_n \tag{5}$$

minimal machen, während sie folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} f_1 + a_{11} s_1 + \cdots + a_{1m} s_m &\geqq \psi_1, \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ f_n + a_{n1} s_1 + \cdots + a_{nm} s_m &\geqq \psi_n; \end{aligned} \tag{6}$$

$$f_1 \geqq 0, \dots, f_n \geqq 0. \tag{7}$$

(Die Erfüllung der Bedingungen $s_1 \geqq 0, \dots, s_m \geqq 0$ wird nicht gefordert!)

Die in (2. 1. 6) gestellte Annahme $\varphi \geqq 0$, d. h. die Annahmen $\varphi_1 \geqq 0, \dots, \varphi_n \geqq 0$ sichern, daß ein Wertsystem existiert, welches den Bedingungen (2), (3), (4) genügt. ($z_1 = 0, \dots, z_n = 0$ ist nämlich ein solches System.)

Die Existenz eines Wertsystems $f_1, \dots, f_n, s_1, \dots, s_m$, das den Bedingungen (6) und (7) genügt, ist trivial. Nun folgt aus diesen beiden Existenzen nach dem Dualitätssatz (genauer nach dem Existenz- und Dualitätssatz) das Vorhandensein eines den Bedingungen (2), (3), (4) genügenden Wertsystems $z_1, \dots, z_n$, welches (1) maximal macht, sowie das Vorhandensein eines den Bedingungen (6), (7) genügenden Wertsystems $f_1, \dots, f_n, s_1, \dots, s_m$, welches (5) minimal macht; ferner folgt, daß das Maximum von (1) gleich dem Minimum von (5) ist. ([11], S. 60—61.)

Bei einem bestimmten Wertsystem $f_1, \dots, f_n$ hat aber das Ungleichungssystem (6), laut eines bekannten Satzes ([4], S. 100), dann und nur dann eine Lösung in den Unbekannten $s_1, \dots, s_m$, wenn für sämtliche die Bedingungen (3) und (4) erfüllende Wertsysteme $z_1, \dots, z_n$ stets

$$z_1(\psi_1 - f_1) + \cdots + z_n(\psi_n - f_n) \leqq 0,$$

d. h.

$$z_1 f_1 + \cdots + z_n f_n \geqq z_1 \psi_1 + \cdots + z_n \psi_n$$

gilt. Das bedeutet jedoch nach (6. 1), daß die Kette $[f_1, \dots, f_n] = f$ kreisfüllend ist. Das duale Problem ist daher gleichwertig mit der Aufsuchung solcher positiven, kreisfüllenden Ketten $f = [f_1, \dots, f_n]$, deren φ-Werte minimal sind. Abgesehen von den Ganzwertigkeiten ergibt also der Dualitätssatz tatsächlich den Satz (2. 1. 6).

Um den vollständigen, auch die Ganzwertigkeiten berücksichtigenden Satz (2. 1. 6) zu erhalten, ziehen wir in Betracht, daß die Matrix $[a_{ij}]$ die Inzidenzmatrix von Γ ist. Man kann nun leicht zeigen, daß die oben vorkommenden Programmierungsprobleme, sowie die zu diesen gehörigen „kanonischen“ Probleme ([11], S. 54) *unimoduläre* Matrizen besitzen. (Eine Matrix heißt unimodular, wenn sämtliche aus ihr gebildeten Minordeterminanten nur die Werte 0, 1 und -1 annehmen können.) Daraus folgt jedoch (s. [12]) für ganzzahlige Werte von φ_i und ψ_i, daß solche ganze Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ bzw. $f_1, \ldots, f_n, s_1, \ldots, s_m$ existieren, die (1) bzw. (5) maximal bzw. minimal machen und die gestellten Bedingungen erfüllen. Damit ist der Beweis von (2. 1. 6) vollendet.

(6. 3) Um den Satz (2. 1. 7) zu behandeln, verzichten wir wieder erst auf die Ganzzahligkeiten. Nach (6. 1) bedeutet dann die Bestimmung der den minimalen ψ-Wert besitzenden positiven, kantefüllenden Zyklen die Aufsuchung derjenigen Wertsysteme $z_1, \ldots, z_n$, die den Ausdruck

$$\psi_1 z_1 + \cdots + \psi_n z_n \tag{8}$$

minimal machen, während sie folgende Bedingungen erfüllen:

$$z_1 \geqq \varphi_1, \ldots, z_n \geqq \varphi_n; \tag{9}$$

$$\begin{aligned} a_{11} z_1 + \cdots + a_{n1} z_n &= 0, \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{1m} z_1 + \cdots + a_{nm} z_n &= 0; \end{aligned} \tag{10}$$

$$z_1 \geqq 0, \ldots, z_n \geqq 0. \tag{11}$$

Zu diesem *ursprünglichen* Programmierungsproblem gehört das folgende *duale* Problem: Man suche diejenigen Wertsysteme $f_1, \ldots, f_n, s_1, \ldots, s_m$, die den Ausdruck

$$\varphi_1 f_1 + \cdots + \varphi_n f_n \tag{12}$$

maximal machen, während sie folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} f_1 + a_{11} s_1 + \cdots + a_{1m} s_m &\leqq \psi_1, \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ f_n + a_{n1} s_1 + \cdots + a_{nm} s_m &\leqq \psi_m; \end{aligned} \tag{13}$$

$$f_1 \geqq 0, \ldots, f_n \geqq 0. \tag{14}$$

(Die Bedingungen $s_1 \geqq 0, \ldots, s_m \geqq 0$ werden nicht gefordert!)

Aus der in (2. 1. 7) gestellten Annahme, nach der jede Kante x, die einen positiven φ-Wert besitzt, in einem positiven Kreis enthalten ist, folgt: Es existiert zu jedem solchen Index i, für den $\varphi_i > 0$ gilt, ein solches System $z_1, \ldots, z_n$, welches (10) und (11) erfüllt und in dem $z_i > 0$ ist. Durch lineare Kombination solcher Wertsysteme kann man jedoch leicht ein solches System $z_1, \ldots, z_n$ erhalten, das sämtliche Bedingungen (9), (10), (11) des ursprünglichen Problems erfüllt.

Hat weiter das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11} s_1 + \cdots + a_{1m} s_m &\leqq \psi_1, \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1} s_1 + \cdots + a_{nm} s_m &\leqq \psi_m \end{aligned} \tag{15}$$

eine Lösung in $s_1, \ldots, s_m$, so existiert offensichtlich ein Wertsystem $f_1, \ldots, f_n$,

$s_1, \ldots, s_m$, das die Bedingungen (13) und (14) des dualen Problems erfüllt. Die Lösbarkeit von (15) ist mit derjenigen Bedingung gleichwertig, daß für jedes Wertsystem $z_1, \ldots, z_n$, welches (10) und (11) erfüllt,

$$\psi_1 z_1 + \cdots + \psi_n z_n \geqq 0$$

gilt ([4], S. 100). Diese Bedingung ist aber gleichbedeutend mit der in (2. 1. 7) gestellten Annahme, daß für jeden positiven Kreis k $\psi[k] \geqq 0$ ist (s. (2. 4. 1)).

Da so die in (2. 1. 7) gestellten Annahmen die Erfüllbarkeit von (9), (10) und (11), sowie von (13) und (14) sichern, folgt nach dem Dualitätssatz die Existenz solcher Wertsysteme $z_1, \ldots, z_n$ und $f_1, \ldots, f_n, s_1, \ldots, s_m$, welche die gestellten Bedingungen erfüllen und (8) bzw. (12) minimal bzw. maximal machen. Es folgt ferner, daß das Minimum von (8) gleich dem Maximum von (12) ist.

Bei bestimmten Werten von $f_1, \ldots, f_n$ hat jedoch (13) dann und nur dann eine Lösung in $s_1, \ldots, s_m$ (s. [4], S. 100), wenn für jedes Wertsystem $z_1, \ldots, z_n$, welches (10) und (11) erfüllt, stets

$$z_1(\psi_1 - f_1) + \cdots + z_n(\psi_n - f_n) \geqq 0,$$

d. h.

$$z_1 f_1 + \cdots + z_n f_n \leqq z_1 \psi_1 + \cdots + z_n \psi_n$$

gilt, d. h. wenn die Kette $[f_1, \ldots, f_n] = f$ kreisaufnehmbar ist. Das duale Problem ist demnach gleichwertig mit der Aufsuchung derjenigen positiven, kreisaufnehmbaren Ketten $f = [f_1, \ldots, f_n]$, deren φ-Werte maximal sind. Von den Ganzwertigkeiten abgesehen ergibt also der Dualitätssatz tatsächlich den Satz (2. 1. 7).

Den vollständigen Satz (2. 1. 7) kann man in ähnlicher Weise erhalten, wie bei (2. 1. 6).

Wir bemerken noch, daß man — abgesehen von den Ganzwertigkeiten — auch die Sätze (3. 2. 6) und (3. 2. 7) aus dem Dualitätssatz unmittelbar herleiten kann. Bei den Beweisen der Ganzwertigkeiten stößt man jedoch hier auf Schwierigkeiten.

(Eingegangen am 1. September 1958.)

Literaturverzeichnis

[1] G. B. Dantzig and D. R. Fulkerson, On the max-flow min-cut theorem of networks, Linear Inequalities and Related Systems, *Annals of Math. Study*, **38** (1956), S. 215—221.

[2] R. P. Dilworth, A decomposition theorem for partially ordered sets, *Annals of Math.*, **51** (1950), S. 161—166.

[3] J. Egerváry, Matrixok kombinatorikus tulajdonságairól, *Mat. és Fiz. Lapok*, **38** (1931), S. 16—27.

[4] KY FAN, On systems of linear inequalities, *Annals of Math. Study*, **38** (1956), S. 99—156.
[5] L. R. FORD, JR. and D. R. FULKERSON, Maximal flow through a network, *Canadian Journal of Math.*, **8** (1956), S. 399—404.
[6] L. R. FORD, JR. and D. R. FULKERSON, A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem, *Canadian Journal of Math.*, **9** (1957), 210 218.
[7] D. GALE, A theorem on flows in networks, *Pacific Journal of Math.*, **7** (1957), S. 1073—1082.
[8] T. GALLAI (GRÜNWALD), Ein neuer Beweis eines Mengerschen Satzes, *Journal London Math. Soc.*, **13** (1938), S. 188—192.
[9] T. GALLAI, Gráfokkal kapcsolatos maximum-minimum tételek. I, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.*, **7** (1957), S. 305—338.
[10] T. GALLAI, Gráfokkal kapcsolatos maximum-minimum tételek. II, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.*, **8** (1958), S. 1—40.
[11] A. J. GOLDMAN and A. W. TUCKER, Theory of linear programming, *Annals of Math. Study*, **38** (1956), S. 53—97.
[12] A. J. HOFFMANN and J. B. KRUSKAL, Integral boundary points of convex polyhedra, *Annals of Math. Study*, **38** (1956), S. 223—246.
[13] D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig, 1936).
[14] K. MENGER, *Kurventheorie* (Leipzig und Berlin, 1932), S. 221—228.
[15] O. ORE, Studies on directed graphs. I, *Annals of Math.*, **63** (1956), S. 383—406.
[16] W. T. TUTTE, The 1-factors of oriented graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), S. 922—931.

Technikai szerkesztő: Molnár Ferenc

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1958. IX. 16. — Terjedelem: 16,75 (A/5) ív

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 58-3501 Felelős vezető: Vincze György