

F6 (1978) 158

THESE PRESENTEE
POUR L'OBTENTION
DU
DOCTORAT DE 3e CYCLE
A
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE
- PARIS 6 -

SPECIALITE : MATHEMATIQUES
MENTION : INFORMATIQUE



par M. Wladyslaw Georges BARTNIK
Sujet de la thèse :

ALGORITHMES DE COUPLAGE DANS LES GRAPHS.

soutenu le devant la Commission composée de :
M. Jean-Claude SIMON Président
M. Michel CHEIN examinateur
M. Jean-Louis LAURIERE "
M. Jean-François MAURRAS "
M. Michel MINOUX "
M. Jean-Patrice NETTER "
M invité

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur SIMON pour m'avoir fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse.

J'adresse de très chaleureux remerciements à Monsieur Jean Louis LAURIERE qui m'a orienté sur les problèmes de couplage et m'a guidé dans ce travail.

Une partie du chapitre II de cette thèse est le résultat d'une collaboration avec Monsieur Michel MINOUX; je lui en suis particulièrement reconnaissant.

Je remercie vivement pour leur aide et leur participation à ce Jury : MM. le Professeur Michel CHEIN, Jean François MAURRAS, Jean Patrice NETTER.

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS

I INTRODUCTION

1.1 Introduction	3
1.2 Définitions, notations et résultats préliminaires.	7
1.3 Algorithme d'EDMONDS pour les couplages de cardinalité maximale.	14
1.4 Un exemple pour l'algorithme d'EDMONDS.	20

II SYSTEME DE MARQUES POUR L'ALGORITHME D'EDMONDS

2.1 Représentation des arbres alternés.	27
2.2 Représentation des orbites.	28
2.3 Représentation des arêtes du couplage \tilde{M}_k .	32
2.4 Reconnaissance de la parité des sommets.	33
2.5 Affectation des marques ext.	33
2.6 Modification des marques lors de la formation des orbites.	36
2.7 Transferts de couplage.	37
2.8 Rééclatement des pseudosommets externes.	40
2.9 Un exemple pour la procédure de marquage.	49

III ALGORITHME DE COUPLAGE DE CARDINALITE MAXIMALE

3.1 Introduction : principe.	60
3.2 Définitions et notations.	62
3.3 Exposé d'une itération de l'algorithme.	65
3.4 Démonstration de validité :	
3.4.1 Commentaires et premiers résultats.	69
3.4.2 Longueurs des chaînes uniques reliant les sommets pairs de la forêt T à ses racines.	73
3.4.3 Démonstration de la minimalité des longueurs des chaînes augmentantes.	78
3.4.4 Convergence de l'algorithme et maximalité du couplage final.	84
3.5 Borne supérieure du nombre d'opérations.	85

IV IMPLEMENTATION DE L'ALGORITHME

4.1 Programme COUPLAGE.	88
4.2 Essais et résultats.	
4.2.1 Graphes aléatoires.	89
4.2.2 Graphes de type $G(6_m)$ et $\tilde{G}(6_m)$.	92

V CONCLUSIONS

5.1 Efficacité de la procédure de marquage.	96
5.2 Comparaison de l'algorithme avec les algorithmes existant.	99

ANNEXE LE PROGRAMME COUPLAGE.

BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE I

INTRODUCTION

1.1 Introduction

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, un couplage M dans G est un sous-ensemble d'arêtes de G tel que pour tout sommet de G il n'existe qu'au plus une arête de M qui lui soit incidente. On peut alors se poser le problème de la recherche d'un couplage de cardinalité maximale, et de façon plus générale, si on donne une valuation aux arêtes de G , on recherchera un couplage de G dont la somme des poids des arêtes soit maximale.

Ces 2 problèmes sont de nature combinatoire; il serait toujours possible d'énumérer exhaustivement tous les couplages possibles : si $|V| = n$ alors le nombre de couplages distincts est de l'ordre de $n!$ et il est évident qu'il est hors de question de procéder de cette façon pour n suffisamment grand; la recherche sur les problèmes de couplage a consisté à déterminer des algorithmes de complexité polynomiale, et non exponentielle.

D'un point de vue algorithmique les problèmes de couplage ont été d'abord étudiés dans le cadre de graphes bipartis, i.e. sans cycles de longueur impaire :

- d'une part HALL (1948, [10]) a présenté un algorithme de complexité $O(n^3)$ pour le problème du couplage de cardinalité maximale,
- KUHN (1955, [12]) d'autre part a donné un algorithme en $O(n^3)$ pour le couplage de poids maximal (problème de l'affectation linéaire).



BERGE (1957, [3]) a caractérisé les couplages de cardinalité maximale dans des graphes quelconques, donnant ainsi une base pour des algorithmes de complexité polynomiale pour ce cas plus général de graphes non bipartis.

EDMONDS ([4], [5]) a présenté, successivement en 1963 et 1964 un algorithme en $O(n^4)$ pour chacun de ces 2 problèmes. Tous les algorithmes performants actuels de couplage se basent sur ces algorithmes fondamentaux d'EDMONDS et c'est ainsi que des versions modifiées de son algorithme de couplage de cardinalité maximale, utilisant des méthodes de marquage particulières ont été données par WITZGALL et ZAHN (1964, [16]), algorithme de complexité $O(n^4)$, puis BALINSKY (1967, [1]), algorithme avec une implémentation possible en $O(n^3)$.

GABOW (1974, [7] , 1976, [8]) a donné une nouvelle et plus efficace implémentation des algorithmes d'EDMONDS :

- en ce qui concerne les couplages de cardinalité maximale, ses algorithmes n'améliorent pas la borne $O(n^3)$, mais de nouvelles améliorations les rendent plus performants que les versions précédentes;
- il a été en outre le premier à donner une version en $O(n^3)$ de l'algorithme d'EDMONDS pour les couplages de poids maximal .

HOPCROFT et KARP (1971, [11]) ont démontré la possibilité d'obtenir un algorithme de complexité $O(n^{5/2})$ pour les couplages de cardinalité maximale, à condition de savoir déterminer en $O(n^2)$ non plus une chaîne augmentante quelconque, comme c'est le cas d'EDMONDS, mais un ensemble de chaînes augmentantes particulières; ils ont appliqué leurs résultats aux cas de graphes bipartis.

EVEN et KARIV (1974, [6]) ont donné une réalisation algorithmique des résultats d'HOPCROFT et KARP pour le cas de graphes quelconques, en utilisant les méthodes de marquage de GABOW. Leur algorithme s'éloigne de l'algorithme original d'EDMONDS.

Le travail présenté dans cette thèse a consisté à réaliser :

1. Un système original de marquage, de performance comparable à celui de GABOW, applicable aussi bien pour l'algorithme d'EDMONDS de couplage de cardinalité maximale que pour celui de couplage de poids maximal; ce système est le résultat d'une collaboration avec M. MINOUX (1977, [13]), dont les idées originales sont présentées dans le chapitre II de cette thèse;
2. Un algorithme de couplage de cardinalité maximale dans un graphe quelconque, basé sur les résultats d'HOPCROFT et KARP : cet algorithme, utilisant le nouveau système de marquage, tout en restant très proche de l'algorithme original d'EDMONDS possède une borne supérieure du nombre d'opérations en $O(n^{5/2})$;
3. Une implémentation de cet algorithme sous forme de programme (écrit en FORTRAN); testé sur une grande quantité de graphes de dimension importante (jusqu'à 500 sommets et 10 000 arêtes), le programme a donné de bons résultats.

Le plan de la thèse est le suivant :

- Chapitre I : définitions et présentation de la théorie d'EDMONDS pour les couplages de cardinalité maximale; les définitions 1.2.1 à 1.2.6 ainsi que le théorème 1.1 sont de C. BERGE ([2], [3]); le reste du chapitre est dû à J. EDMONDS ([4], [5]); la terminologie française des définitions d'EDMONDS, ainsi que les principales démonstrations sont celles de M. MINOUX ([13]).
- Chapitre II : Présentation du système de marquage.
- Chapitre III : Présentation de l'algorithme.
- Chapitre IV : Implémentation de l'algorithme; résultats.

1.2 Définitions, notations et résultats préliminaires

Dans tout ce qui suivra $G = (V, E)$ dénotera un graphe simple, non orienté; $|V| = n$, $|E| = m$.

1.2.1 Couplage M dans G : $M = \{e \in E / e_1, e_2 \in M \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \emptyset\}$.

1.2.2 Couplage parfait dans G : couplage M dans G tel que

$$\forall x_i \in V \exists x_j \in V \text{ tel que } (x_i, x_j) \in M.$$

1.2.3 Chaîne alternée $\mu(x_1, x_2)$ dans (G, M) : chaîne simple dans G dont les arêtes appartiennent alternativement à M et $E - M$, d'origine x_1 et d'extrémité x_2 .

Propriété 1.1 Soit M un couplage dans G et μ une chaîne alternée; $M \oplus \mu$ est un couplage dans G (le symbole \oplus dénote la différence symétrique, i.e. $M \oplus \mu = (M - \mu) \cup (\mu - M)$).

1.2.4 Transfert de couplage sur une chaîne alternée μ : échange des arêtes de M avec les arêtes de $M \oplus \mu$.

1.2.5 Sommet insaturé dans (G, M) : $x \in V$ tel que $\forall (x, y) \in E, (x, y) \notin M$.

1.2.6 Chaîne alternée $\mu(x_1, x_2)$ augmentante dans (G, M) : chaîne alternée dans (G, M) telle que x_1, x_2 sont insaturés dans (G, M) .

Propriété 1.2 Un transfert de couplage sur une chaîne alternée augmentante dans (G, M) induit un couplage $M' = M \oplus \mu$ tel que $|M'| = |M| + 1$.

THEOREME 1.1 (BERGE [3]) Un couplage M dans G est de cardinalité maximale si et seulement si il n'existe pas de chaînes alternées augmentantes dans (G, M) .

DEMONSTRATION ([11])

1. La condition est suffisante.

Supposons qu'il existe une chaîne μ alternée augmentante dans (G, M) . Alors, par la propriété 1.2, $M' = M \oplus \mu$ est un couplage dans G de cardinalité supérieure à celle de M .

2. La condition est nécessaire.

Supposons qu'il existe un couplage N dans G tel que $|N| > |M|$. On considère le graphe $\bar{G} = (V, M \oplus N)$. Les composantes connexes de \bar{G} sont de 3 types :

- (1) sommet isolé,
- (2) cycle élémentaire pair dont les arêtes appartiennent alternativement à M - Net N - M ,
- (3) chaîne élémentaire dont les arêtes appartiennent alternativement à M - Net N - M .

En effet par définition d'un couplage, tout sommet de \bar{G} est incident à au plus une arête de M - N et à au plus une arête de N - M .

Soient C_1, C_2, \dots, C_p les composantes connexes de \bar{G} , $C_i = (V_i, E_i)$.

Soit $\delta(C_i) = |E_i \cap N| - |E_i \cap M|$. Alors $\delta(C_i) \in \{-1, 0, 1\}$ et $\delta(C_i) = 1$ si et seulement si C_i est une chaîne alternée augmentante pour M .

$$\sum_{i=1}^p \delta(C_i) = |N - M| - |M - N| = |N| - |M|.$$

Il existe donc au moins $|N| - |M|$ composantes C_i de \bar{G} telles que $\delta(C_i) = 1$.

Corollaire 1.1 Si M est parfait ou ne laisse qu'un seul sommet insaturé, alors M est de cardinalité maximale.

1.2.7 *Arbre alterné* $T = (V_1, E_1)$ dans (G, M) : sous-graphe partiel connexe sans cycles de G tel que :

- (1) il existe un unique sommet x_h de T insaturé dans (G, M) : ce sommet x_h est appelé la racine de T ;
- (2) $\forall x_i \in V_1$, l'unique chaîne $\mu(x_i, x_h)$ dans T est une chaîne alternée dans (G, M) ;
- (3) toute chaîne dans T reliant la racine x_h aux sommets de T de degré 1 est de longueur paire.

On notera $V(T) = V_1$, $E(T) = E_1$.

$$V(T) = O(T) \cup I(T), \text{ où}$$

$$O(T) = \{x \in V(T) / \text{l'unique chaîne } \mu(x, x_h) \text{ dans } T \text{ est de longueur paire} \},$$

$$I(T) = \{x \in V(T) / \text{l'unique chaîne } \mu(x, x_h) \text{ dans } T \text{ est de longueur impaire} \} ..$$

Les sommets $x \in O(T)$ sont dits sommets pairs, ceux de $I(T)$ sont dits impairs.

Propriété 1.3

$\forall x \in I(T) \exists 2$ uniques arêtes $e_1, e_2 \in E(T)$ incidentes à x ,
i.e. $d_T(x) = 2$.

1.2.8 *Arbre alterné augmentant* T_a dans (G, M) :

$T_a = T \cup (x_1, x_2)$, où T est un arbre alterné dans (G, M) ,
 $x_1 \in O(T)$ et $x_2 \notin V(T)$ est insaturé dans (G, M) .

1.2.9 Concaténation de 2 chaînes $\mu_1(x_\ell, x_j)$ et $\mu_2(x_j, x_i)$:

$$\mu(x_\ell, x_i) = \mu_1(x_\ell, x_j) \dot{+} \mu_2(x_j, x_i) .$$

Propriété 1.4 Soit $Ta = T \vee (x_1, x_2)$ un arbre alterné augmentant dans (G, M)

La chaîne $\mu(x_2, x_n) = (x_2, x_1) \dot{+} \mu(x_1, x_n)$ est une chaîne alternée augmentante dans (G, M) .

1.2.10 *Orbite* B dans (G, M) : cycle alterné élémentaire dans (G, M) de longueur impaire satisfaisant la condition suivante :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{si } V(B) \text{ dénote l'ensemble des sommets de } B \\ \text{et } |V(B)| = 2k + 1 \text{ et} \\ \text{si } E(B) \text{ dénote l'ensemble des arêtes de } B, \text{ alors} \\ |E(B) \cap M| = k. \end{array} \right.$$

L'unique sommet $x_n \in V(B)$ insaturé dans (G, M) est appelé racine de B .

On note $M_B = \{ e \in M / e \in E(B) \}$.

1.2.11 Contraction de G par rapport au sous-ensemble $W \subset V$:

$$G/W = (V - W + \{y\}, E_w) \text{ où}$$

$$E_w = \{(x_i, x_j) \in E / x_i \in V - W, x_j \in V - W\} \cup$$

$$\{(x_i, y) / x_i \in V - W \text{ et } \exists x_j \in W \text{ tel que } (x_i, x_j) \in E\}$$

On note $V(G/W) = V - W + \{y\}$, $E(G/W) = E_w$.

Si B est une orbite dans (G, M) , on note $\tilde{G} = G/B$, et de façon plus générale $\tilde{G}_{i+1} = \tilde{G}_i/B_{j_i}$, où $B_{j_0}, B_{j_1}, \dots, B_{j_i}$ est une suite d'orbites dans la suite de graphes contractés :
 $\tilde{G}_0 = G, \tilde{G}_1 = G_0/B_{j_0}, \tilde{G}_2 = \tilde{G}_1/B_{j_1}, \dots, \tilde{G}_{i+1} = \tilde{G}_i/B_{j_i}$,
 chacun des B_{j_k} étant une orbite dans le graphe contracté \tilde{G}_k .

De manière similaire, on note $\tilde{T}_{i+1} = \tilde{T}_i/B_{j_i}$.
 Enfin $\tilde{M}_i = M \cap E(\tilde{G}_i)$.

Le sommet image de l'orbite B_{j_i} dans \tilde{G}_{i+1} sera noté x_{j_i} , par opposition aux sommets de G notés x_k , et sera appelé pseudosommet x_{j_i} .

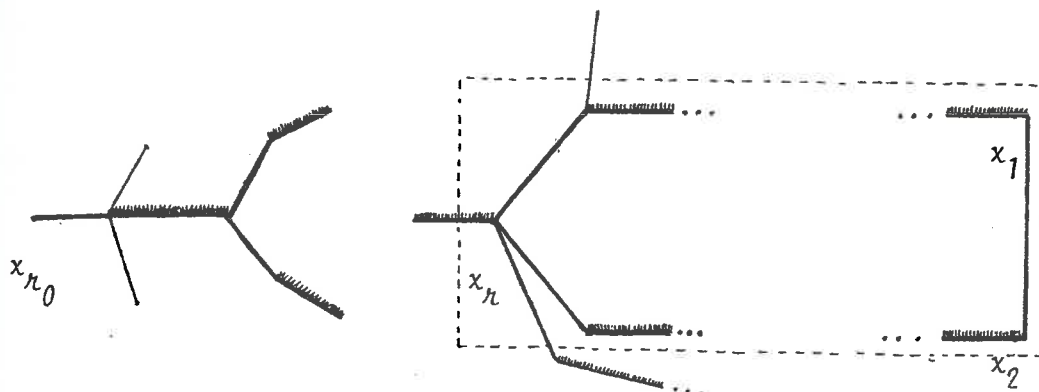
1.2.12 *Arbre alterné fleuri* T_f dans (G, M) :

$$T_f = T \cup (x_1, x_2), \text{ où } T \text{ est un arbre alterné dans } (G, M), \\ x_1, x_2 \notin O(T).$$

Propriété 1.5 L'arête (x_1, x_2) de la définition 1.2.12 forme avec les arêtes de T une orbite.

En effet les chaînes $\mu(x_1, x_n), \mu(x_2, x_n)$, (où x_n est la racine de T), de longueur paire, ont au moins 1 sommet commun (x_n), et se rejoignent en un certain sommet x_{n_0} .

- Si $x_n = x_{n_0}$ alors x_n est le seul sommet commun des 2 chaînes et alors $\mu(x_1, x_n) \dot{+} \mu(x_2, x_n) \dot{+} (x_1, x_2)$ est un cycle alterné de longueur impaire satisfaisant la condition (1) de la définition 1.2.10, donc une orbite, de racine x_{n_0} .
- Si $x_n \neq x_{n_0}$, alors x_{n_0} est de degré 3 au moins, et par la propriété 1.3 $x_{n_0} \in O(T)$. Alors les sous-chaînes $\mu(x_1, x_{n_0})$ et $\mu(x_2, x_{n_0})$ de $\mu(x_1, x_n)$ et $\mu(x_2, x_n)$ sont de longueurs paires et donc $\mu(x_1, x_{n_0}) \dot{+} \mu(x_2, x_{n_0}) \dot{+} (x_1, x_2)$ est de nouveau un cycle alterné de longueur impaire satisfaisant (1) de la définition 1.2.10, donc une orbite. (figure 1.1).



Les arêtes en trait foncé sont celles de l'arbre T ;
l'orbite est encadrée.

Arbre alterné fleuri $T_f = T \cup (x_1, x_2)$ et l'orbite qui en résulte.

(figure 1.1).

1.2.13 *Arbre alterné hongrois* T_h dans (G, M) :

Arbre alterné T tel que $\forall (x_i, x_j) \in E$ telle que
 $x_i \in O(T) : x_j \in I(T)$.

Le résultat suivant montre que lorsqu'on a détecté un arbre hongrois, il ne peut exister de chaîne alternée augmentante empruntant des sommets de cet arbre.

RESULTAT 1.2

Soit $W_1 = V(T_a)$, $W_2 = V - W_1$ et $G_1 = (W_1, E_1)$, $G_2 = (W_2, E_2)$
les sous-graphes de G engendrés par W_1 et W_2 .

$$M_1 = M \cap E_1, M_2 = M \cap E_2.$$

M est un couplage de cardinalité maximale de $G \iff M_2$ est un couplage maximal de G_2 .

DEMONSTRATION

1. La condition est nécessaire .

$\nexists e = (x_1, x_2) \in M$ telle que $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$ car sinon x_2 sera marqué pair. Donc $M = M_1 \cup M_2, M_1 \cap M_2 = \emptyset$ et par conséquent $|M| = |M_1| + |M_2|$. Si M_2 n'est pas maximal dans G_2 , alors M n'est pas maximal dans G .

2. La condition est suffisante.

Supposons que M_2 est un couplage de cardinalité maximale dans G_2 , mais M ne l'est pas dans G . Il existerait alors une chaîne alternée augmentante $\mu(x_{j_0}, x_{k_0})$ joignant les 2 sommets insaturés x_{j_0}, x_{k_0} pour M dans G .

On ne peut avoir $x_{j_0} = x_n$, car sinon x_{k_0} aurait été marqué;

On ne peut avoir non plus $x_{k_0} = x_n$, car x_{j_0} aurait été marqué.

Donc $x_{j_0}, x_{k_0} \in W_2$.

$\mu(x_{j_0}, x_{k_0})$ doit emprunter des sommets de W_1 si non elle serait une chaîne augmentante dans G_2 et M_2 ne serait pas de cardinalité maximale.

Soit x_ℓ un tel sommet de W_1 , donc $x_\ell \in V(T_a)$ et il existe une chaîne alternée entre x_n et $x_\ell, \mu(x_\ell, x_n)$.

Soit x_{ℓ_1} le premier sommet de $\mu(x_{j_0}, x_{k_0})$ rencontré lorsqu'on parcourt $\mu(x_n, x_\ell)$; nécessairement $x_{\ell_1} \in I(T_a)$ et il sépare $\mu(x_{j_0}, x_{k_0})$ en 2 sous-chaînes alternées $\mu_1 = \mu(x_{\ell_1}, x_{j_0})$ et $\mu_2 = \mu(x_{\ell_1}, x_{k_0})$ dont l'une est paire et l'autre impaire.

Si μ_1 est paire, alors x_{j_0} aurait pu être marqué (dans l'autre cas, c'est x_{k_0} qui aurait pu être marqué), on obtient donc une contradiction.

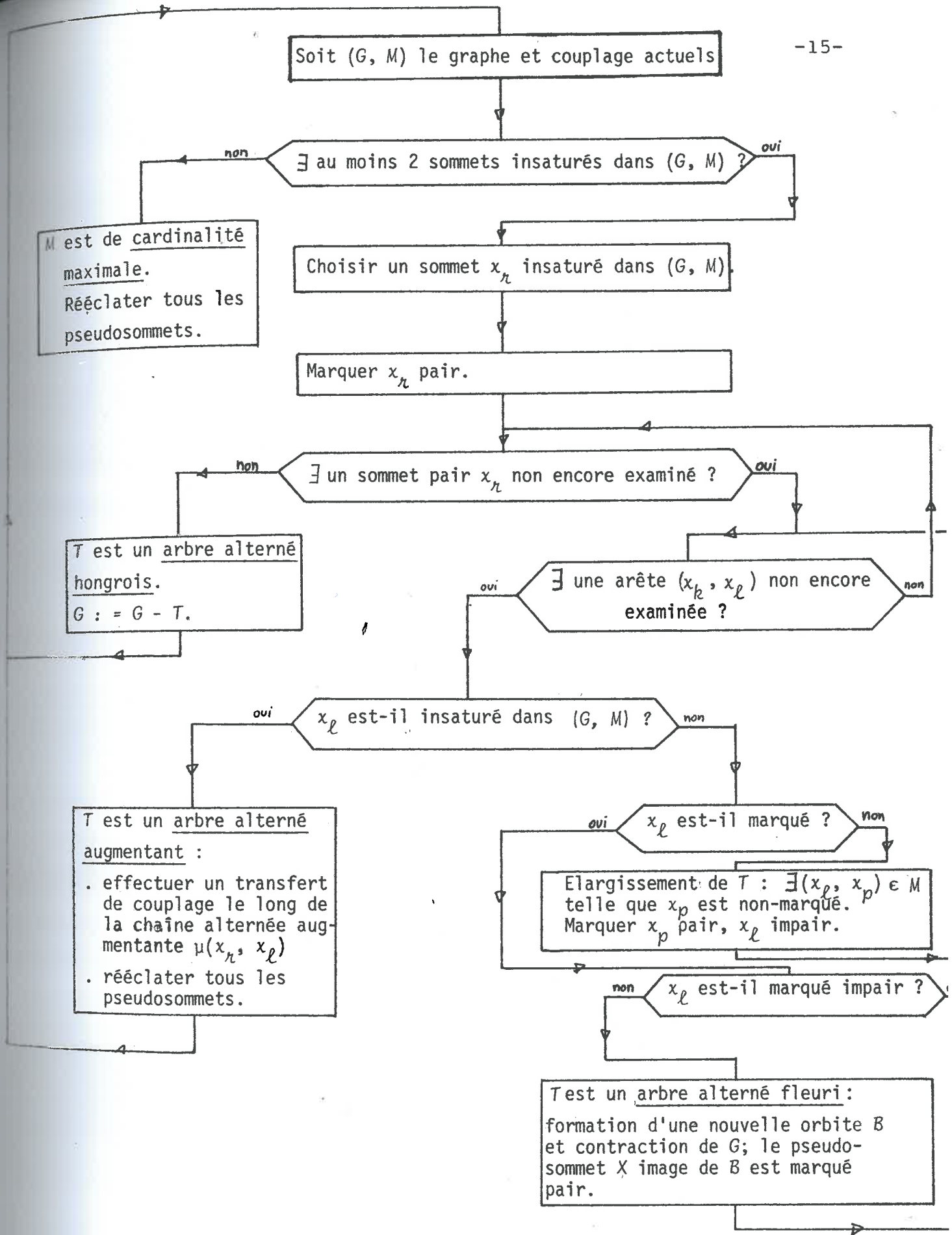
1.3 Algorithme d'EDMONDS pour les couplages de cardinalité maximale.

1.3.1 Principe

L'algorithme se base sur le théorème 1.1 de BERGE et a pour but de détecter des chaînes alternées augmentantes dans G . Soit M le couplage en cours (au début, soit $M = \emptyset$, soit M est obtenu par une heuristique); si M laisse insaturé au plus 1 sommet de G , alors M est de cardinalité maximale (corollaire 1.1); sinon on choisit un sommet insaturé x_n et on construit un arbre alterné ayant pour racine x_n . Cette construction s'effectue par une étude successive des arêtes incidentes à des sommets pairs de l'arbre, et aboutit à l'un des 3 cas suivants :

- (1) obtention d'un arbre augmentant,
- (2) obtention d'un arbre hongrois,
- (3) obtention d'un arbre fleuri.

Dans le premier cas un transfert de couplage sur la chaîne alternée augmentante trouvée permet de diminuer de 2 le nombre de sommets insaturés dans G ; dans le deuxième cas, il a été montré plus haut qu'on peut abandonner pour le reste de l'algorithme le sous-graphe partiel de G engendré par l'arbre hongrois; dans le troisième cas, on contracte le graphe G par rapport à l'orbite trouvée, et on continue l'extension de l'arbre alterné. Une application répétée de l'algorithme permet donc d'obtenir un couplage maximal (voir l'organigramme 1).



ORGANIGRAMME 1

1.3.2 Fondement théorique .

RESULTAT 1.3

Soit ν un cycle élémentaire de longueur impaire dans G , $|V(\nu)| = 2k+1$, $k > 1$.

Si M_1 est un couplage dans $\tilde{G} = G/V(\nu)$, alors il existe un couplage de cardinalité maximale M_2 de ν tel que $M = M_1 \cup M_2$ est un couplage de G .

RESULTAT 1.4

Soit M un couplage de G laissant au moins 2 sommets insaturés, B une orbite dans (G, M) de racine x_B et \tilde{T} un arbre alterné dans le graphe contracté $\tilde{G} = G/B$, le pseudosommet X correspondant à B dans \tilde{G} étant un sommet pair de T .

Alors M est un couplage de cardinalité maximale de $G \iff M_1 = M - M_B$ est un couplage de cardinalité maximale de \tilde{G} .

DEMONSTRATION

1. La condition est nécessaire :

$|M| = |M_1| + |M_B|$ et donc en vertu du résultat 1.3 M_1 est de cardinalité maximale.

2. La condition est suffisante :

Supposons que M_1 soit un couplage de cardinalité maximale de \tilde{G} , mais M ne soit pas de cardinalité maximale dans G .

Soient M' et M'_1 déduits de M et M_1 par transferts de couplage le long de $\mu(x_B, x_h)$. La chaîne $\mu(x_B, x_h)$ étant paire, M' a la même cardinalité que M et n'est donc pas maximal dans G .

M'_1 est un couplage de \tilde{G} et $|M'_1| = |M_1|$ et donc M'_1 est un couplage de cardinalité maximale dans \tilde{G} .

Le sommet x_B est insaturé pour M' et donc X est dans \tilde{G} insaturé pour M'_1 .

Comme M' n'est pas maximal, alors (théorème 1.1 de BERGE) il admet une chaîne alternée augmentante $\mu(x_a, x_b)$ joignant dans G les sommets x_a et x_b insaturés pour M' .

Nécessairement $\mu(x_a, x_b)$ doit rencontrer $\mu(x_B, x_h)$ sinon elle serait augmentante pour M'_1 ce qui est impossible. Au moins un des 2 sommets x_a ou x_b est différent de x_B : soit $x_a \neq x_B$. Soit $\mu(x_a, x_c)$ la partie de $\mu(x_a, x_b)$ comprise entre x_a et le premier sommet de $\mu(x_B, x_h)$. Nécessairement l'arête de $\mu(x_a, x_c)$ incidente à $\mu(x_B, x_h)$ n'appartient pas à M' et donc n'appartient pas à M'_1 .

Alors dans \tilde{G} la chaîne alternée $\mu(x_a, x_c) \dot{+} \mu(x_c, X)$ joignant x_a et X insaturés pour M'_1 est augmentante, ce qui est en contradiction avec le fait qu'on a supposé M'_1 de cardinalité maximale.

1.3.3 Enoncé de l'algorithme

Soit $(\tilde{G}_i, \tilde{T}_i, \tilde{M}_i)$ le graphe obtenu après contractions des orbites détectées, l'arbre alterné en cours de construction et le couplage actuel dans \tilde{G}_i (voir définition 1.2.11); x_n est la racine de \tilde{T}_i .

Soit (x_k, x_ℓ) une arête de \tilde{G}_i , telle que $x_k \in O(\tilde{T}_i)$. L'un des 4 cas suivants peut avoir lieu :

1.3.2.1 Si $x_\ell \notin V(\tilde{T}_i)$ et x_ℓ insaturé pour \tilde{M}_i , alors la chaîne $\mu(x_\ell, x_n) = (x_\ell, x_k) \dot{+} \mu(x_k, x_n)$ est une chaîne alternée augmentante joignant les 2 sommets insaturés x_n, x_ℓ : en effet l'arbre $T_a = \tilde{T}_i \cup (x_k, x_\ell)$ est un arbre alterné augmentant.

1.3.2.2 Si $x_\ell \notin V(\tilde{T}_i)$ et x_ℓ n'est pas insaturé pour \tilde{M}_i , alors il existe $e' = (x_\ell, x_p) \in \tilde{M}_i$ telle que $x_p \notin V(\tilde{T}_i)$. (figure 1.2)



Adjonction de 2 nouvelles arêtes dans l'arbre alterné \tilde{T}_i .
figure 1.2

On adjoint alors à \tilde{T}_i les arêtes (x_k, x_ℓ) et (x_ℓ, x_p) :

$$I(\tilde{T}_i) \leftarrow I(\tilde{T}_i) \cup \{x_\ell\},$$

$$O(\tilde{T}_i) \leftarrow O(\tilde{T}_i) \cup \{x_p\},$$

$$E(\tilde{T}_i) \leftarrow E(\tilde{T}_i) \cup (x_k, x_\ell) \cup (x_\ell, x_p).$$

1.3.2.3 Si $X_\ell \in O(\tilde{T}_i)$, alors (X_k, X_ℓ) forme avec \tilde{T}_i un arbre alterné fleuri. Soit B_{j_i} l'orbite ainsi trouvée.

Le résultat 1.4 montre qu'on peut se restreindre à $\tilde{G}_{i+1} = \tilde{G}_i / B_{j_i}$ et $\tilde{M}_{i+1} = \tilde{M}_i \cap E(\tilde{G}_{i+1})$ pour la recherche d'une chaîne alterné augmentante pour M.

On contracte \tilde{G}_i : $\tilde{G}_{i+1} = \tilde{G}_i / B_{j_i}$, $\tilde{T}_{i+1} = \tilde{T}_i / B_{j_i}$,
 $\tilde{M}_{i+1} = \tilde{M}_i \cap E(\tilde{G}_{i+1})$.

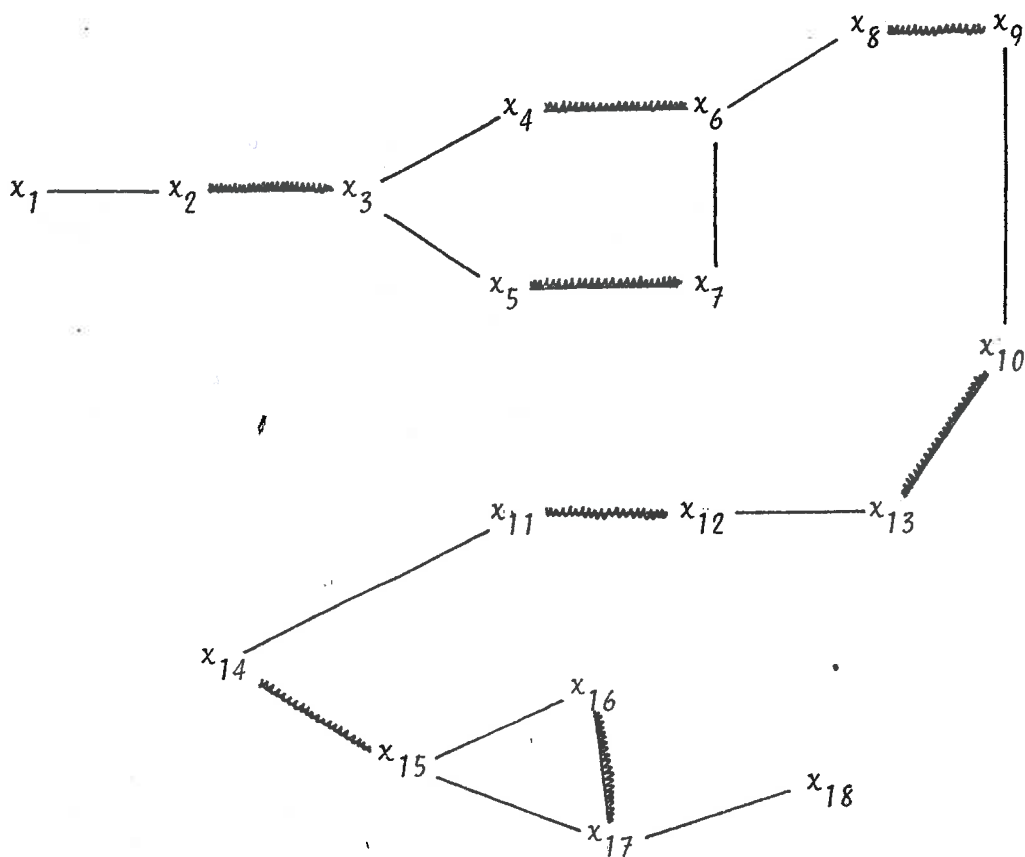
On vérifie facilement que \tilde{T}_{i+1} est un arbre alterné de \tilde{G}_{i+1} . Le pseudosommet X_{j_i} image de B_{j_i} dans \tilde{G}_{i+1} est marqué pair dans \tilde{T}_{i+1} .

1.3.2.4 Si $\forall (X_k, X_\ell)$ tel que $X_k \in O(\tilde{T}_i)$, $X_\ell \in I(\tilde{T}_i)$, alors aucun nouveau sommet de \tilde{G}_i ne peut plus être marqué et on ne peut plus étendre la construction de \tilde{T}_i : \tilde{T}_i est donc un arbre alterné hongrois.

Le résultat 1.2 permet de restreindre la recherche ultérieure d'une chaîne augmentante au sous-graphe partiel de G obtenu en éliminant les sommets de \tilde{T}_i .

1.4 Un exemple pour l'algorithme d'EDMONDS.

Soit le graphe G et le couplage M illustrés par la figure 1.3 (les arêtes de M sont dessinées en traits épais).



$$M = \{(x_2, x_3), (x_4, x_6), (x_5, x_7), (x_8, x_9), (x_{10}, x_{13}), (x_{11}, x_{12}), (x_{14}, x_{15}), (x_{16}, x_{17})\}.$$

Graphe G et couplage M de l'exemple 1.4
figure 1.3

1) Il existe 2 sommets insaturés dans (G, M) : x_1 et x_{18} ; on construit un arbre alterné de racine $x_n = x_1$.

$$V(T) = \{x_1\}, \quad E(T) = \emptyset, \quad O(T) = \{x_1\}, \quad I(T) = \emptyset.$$

2) En examinant successivement les arêtes (x_1, x_2) , puis (x_3, x_4) , (x_3, x_5) on obtient T tel que $V(T) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$,

$$E(T) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_7)\},$$

$$O(T) = \{x_1, x_3, x_6, x_7\}, \quad I(T) = \{x_2, x_4, x_5\}.$$

3) On examine alors l'arête (x_6, x_7) : $T \cup (x_6, x_7)$ est un arbre alterné fleuri (voir définition 1.2.12); on a détecté un cycle alterné élémentaire B_1 ,

$$B_1 = [x_3, x_4, x_6, x_7, x_5], \text{ de longueur } 5.$$

$$V(B_1) = \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}, \quad |V(B_1)| = 5,$$

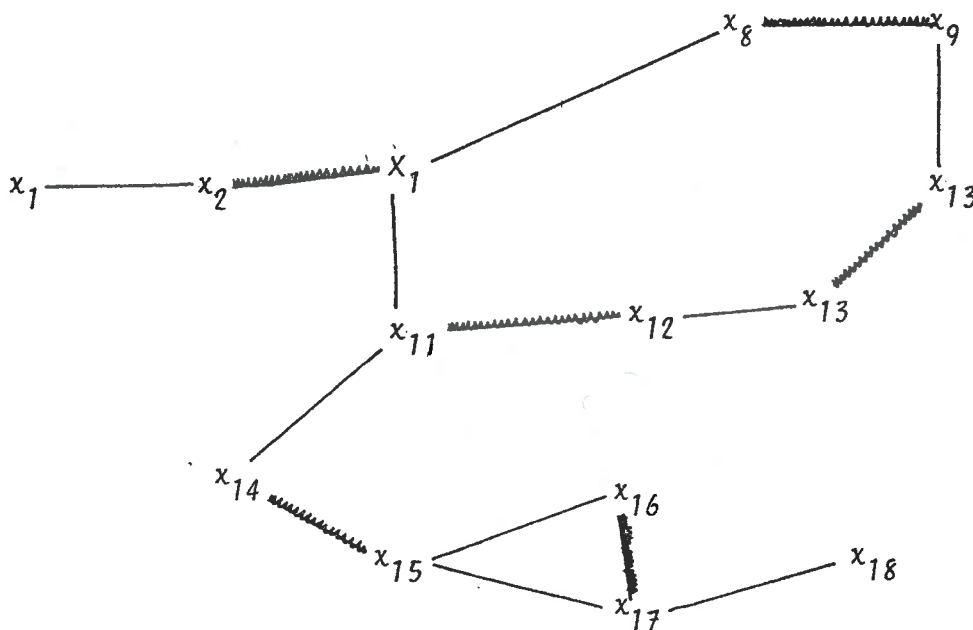
$$E(B_1) = \{(x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_7), (x_6, x_7)\},$$

$$E(B_1) \cap M = \{(x_4, x_6), (x_5, x_7)\}, \quad |E(B_1) \cap M| = 2.$$

B_1 satisfait donc la définition 1.2.10 et est donc une orbite, dont la racine est le sommet x_3 .

On contracte G par rapport à B_1 :

$$\tilde{G}_1 = G/B_1, \quad \tilde{T}_1 = T/B_1, \quad \tilde{M}_1 = M \cap E(\tilde{G}_1) \text{ (voir figure 1.4).}$$



Graphe \tilde{G}_1 contracté par rapport à l'orbite B_1 .

figure 1.4

On a donc : $O(\tilde{T}_1) = \{x_1, x_7\}$, $I(\tilde{T}_1) = \{x_2\}$,

$$\tilde{M}_1 = \{(x_2, x_7), (x_8, x_9), (x_{10}, x_{13}), (x_{11}, x_{12}), (x_{14}, x_{15}), (x_{16}, x_{17})\}$$

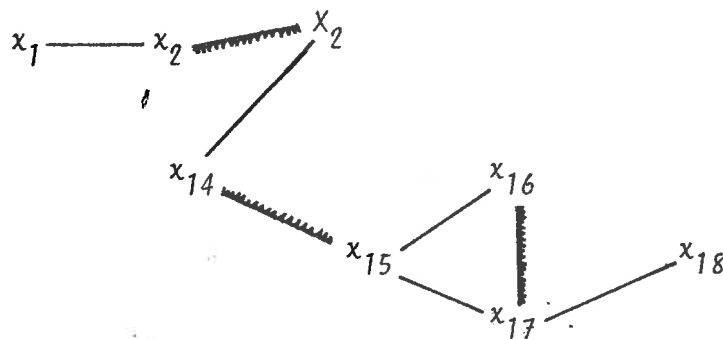
4) On examine ensuite les arêtes (x_1, x_8) , (x_1, x_{11}) , (x_9, x_{10}) et enfin (x_{12}, x_{13}) ;

on trouve alors une nouvelle orbite B_2 ,

$$V(B_2) = \{x_1, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}\}, \text{ de racine } x_1.$$

On contracte alors \tilde{G}_1 par rapport à B_2 :

$$\tilde{G}_2 = G_1/B_2, \tilde{T}_2 = T_1/B_2, \tilde{M}_2 = \tilde{M}_1 \cap E(\tilde{G}_2) \text{ (voir figure 1.5)}$$



Graphe G_2 contracté par rapport à l'orbite B_2

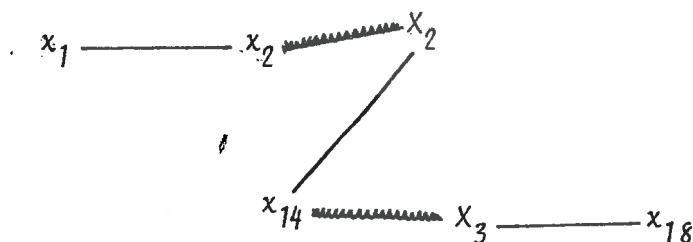
figure 1.5

On a alors $O(\tilde{T}_2) = \{x_1, x_7\}$, $I(\tilde{T}_2) = \{x_2\}$,

$$\tilde{M}_2 = \{(x_2, x_7), (x_{14}, x_{15}), (x_{16}, x_{17})\}.$$

5) On examine ensuite les arêtes (x_2, x_{14}) , (x_{15}, x_{16}) et (x_{16}, x_{17}) et une nouvelle orbite B_3 , $V(B_3) = \{x_{15}, x_{16}, x_{17}\}$, de racine x_{15} est ainsi mise en évidence : $\tilde{G}_3 = \tilde{G}_2/B_3$, $\tilde{T}_3 = \tilde{T}_2/B_3$, $\tilde{M}_3 = \tilde{M}_2 \cap E(\tilde{G}_3)$.

6) Enfin l'examen de l'arête (x_3, x_{18}) conduit à un arbre alterné augmentant $T_a = \tilde{T}_3 \cup (x_3, x_{18})$ (voir la définition 1.2.8 et la figure 1).



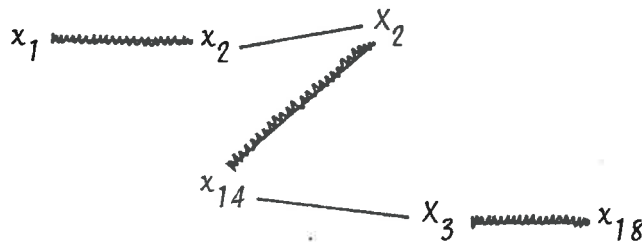
Arbre alterné augmentant $T_a = \tilde{T}_3 \cup (x_3, x_{18})$.

figure 1.6

$$O(\tilde{T}_3) = \{x_1, x_2, x_3\}, I(\tilde{T}_3) = \{x_2, x_{14}\}, \tilde{M}_3 = \{(x_2, x_2), (x_{14}, x_3)\}.$$

La chaîne $\mu(x_{18}, x_1) = (x_3, x_{18}) \dot{+} \mu(x_3, x_1)$ est une chaîne alternée augmentante dans $(\tilde{G}_3, \tilde{M}_3)$ (définition 1.2.6 et propriété 1.4).

- 7) On procède alors à un transfert de couplage le long de $\mu(x_{18}, x_1)$, qui induit un nouveau couplage $M' = \tilde{M}_3 \oplus \mu(x_{18}, x_1)$ (propriété 1.1), et tel que $|M'| = |\tilde{M}_3| + 1 = |M| + 1$ (propriété 1.2; voir figure 1.7).



Couplage M' obtenu par transfert de couplage le long de la chaîne alternée augmentante $\mu(x_{18}, x_1)$.
figure 1.7

- 8) On effectue maintenant le rééclatement des pseudosommets X_3, X_2 . Le couplage interne de B_3 , compatible avec M' est le suivant :

$$M_{B_3} = \{(x_{15}, x_{16})\};$$

pour B_2 , $M_{B_2} = \{(x_{12}, x_{13}), (x_9, x_{10}), (x_1, x_8)\}$.

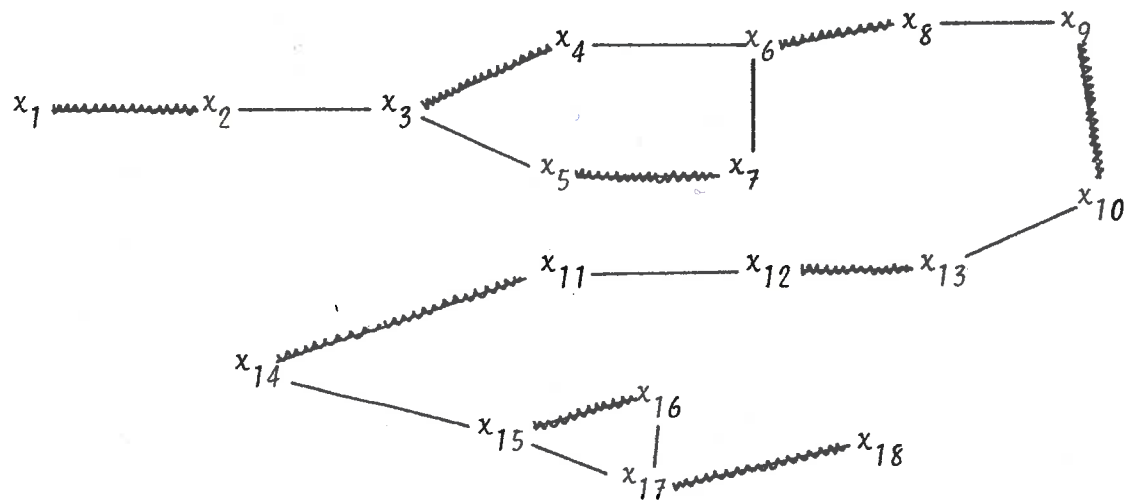
Ces 2 sous-couplages sont obtenus par transfert de couplage le long des sous-chaînes de longueur paire entre les nouvelles racines des orbites B_3 et B_2 et leurs anciennes racines :

- Pour B_3 l'ancienne racine est le pseudosommet x_1 , la nouvelle est le sommet x_{11} ,
- pour B_2 l'ancienne racine : x_{15} , la nouvelle : x_{17} . (voir le résultat 1.3.)

On rééclate enfin le pseudosommet B_1 : l'ancienne racine de B_1 est le sommet x_3 , sa nouvelle racine est x_6 ; le couplage interne de B_1 , compatible avec M' est obtenu par transfert de couplage le long de la sous-chaîne alternée $\mu(x_6, x_3) = [x_6, x_4, x_3]$.

On obtient ainsi un nouveau couplage M'' dans G , tel que

$$|M''| = |M'| = |M| + 1 \text{ (voir figure 1.8).}$$



Couplage M'' obtenu après transfert de couplage le long de la chaîne alternée augmentante $\mu(x_{18}, x_1)$.

figure 1.8

- 9) Il n'existe plus aucun sommet insaturé dans (G, M'') :
En vertu du théorème 1.1, le couplage M'' est un couplage
de cardinalité maximale.

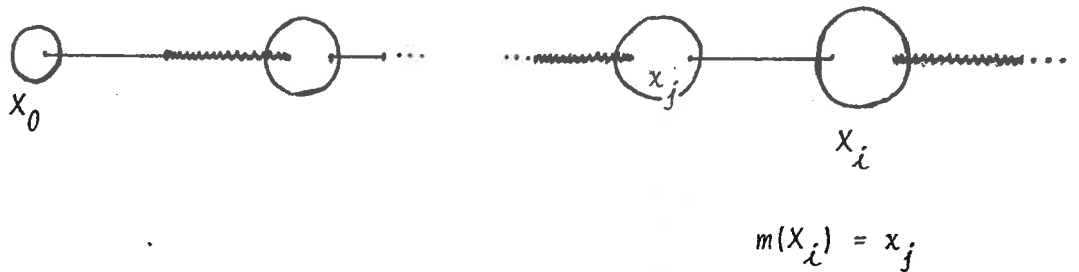
UN SYSTEME DE MARQUES POUR L'ALGORITHME D'EDMONDS

2.1 Représentation des arbres alternés : marques m .

Tout sommet $X_i \in \tilde{G}_k$ possède une marque $m(X_i)$ définie de la façon suivante :

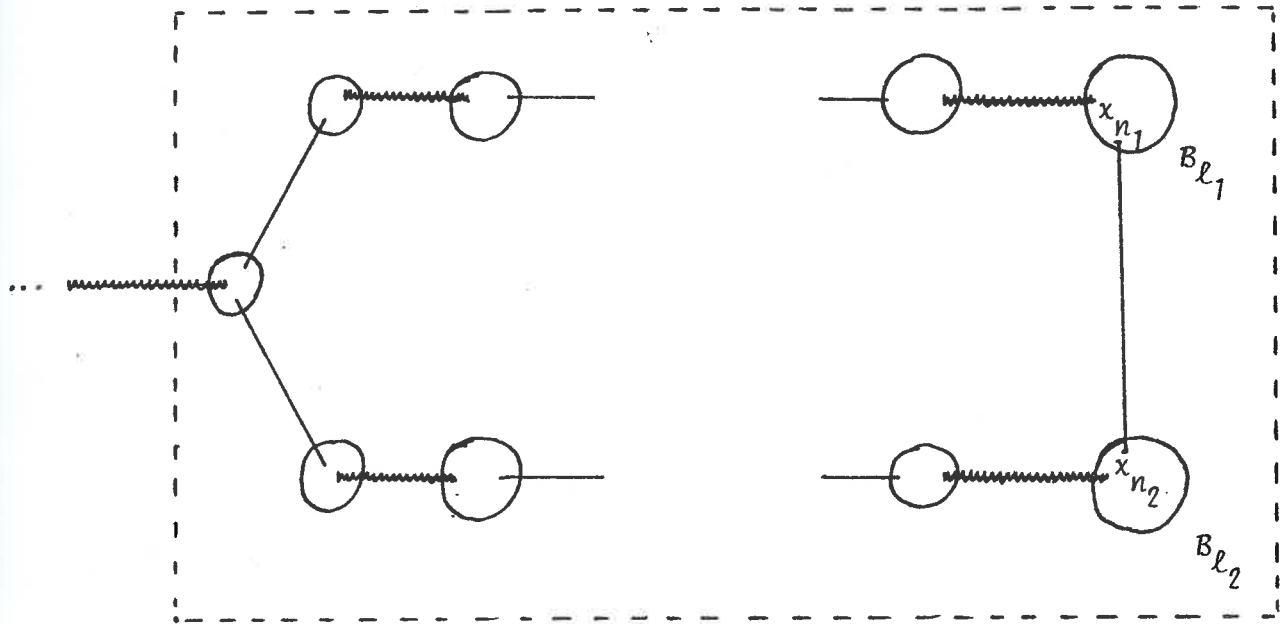
2.1.1 Si la première marque de X_i est paire, alors
 $m(X_i) = 0$.

2.1.2 Si la première marque de X_i est impaire, alors
 $m(X_i) = x_j$, où x_j est le sommet (vrai) prédécesseur pair de X_i sur l'unique chaîne alternée (impaire) $\mu^-(X_i, X_0)$ le reliant à la racine X_0 de l'arbre $\tilde{T}_l (l \leq k)$; \tilde{T}_l correspond à l'arbre alterné au moment du marquage de X_i (figure 2.1).



Marquage d'un sommet impair.
 figure 2.1

2.1.3 Si $X_i \in \tilde{G}_k - \tilde{T}_k$, alors $m(X_i) = -1$.



Marques f , σ , e d'un pseudosommet.

$$\delta_1(B_\ell) = x_{n_1}, \delta_2(B_\ell) = x_{n_2}, \sigma(x_{n_1}) = X_{\ell_1}, \sigma(X_{\ell_1}) = X_\ell,$$

$$e(x_{n_1}) = X_\ell, e(X_{\ell_1}) = X_\ell.$$

figure 2.3

2.2.3 Marques σ et e .

Soit $X \in \tilde{G}_{k_1} \cap \tilde{T}_{k_1}$ ($k_1 < k$) et supposons qu'on ait détecté une nouvelle orbite B_ℓ telle que $X \in B_\ell$.

Alors $\tilde{G}_{k_1+1} = \tilde{G}_{k_1}/B_\ell$, et X_ℓ est le pseudosommet dans \tilde{G}_{k_1+1} correspondant à l'orbite B_ℓ .

On pose alors $\sigma(X) = X_\ell$.

Si $X \in \tilde{G}_k \cap \tilde{T}_k$, alors $\sigma(X) = X$.

On définit ainsi, pour tout sommet $x_i \in X_j$ dans $(\tilde{G}_k, \tilde{T}_k)$ une suite $x_i, \sigma(x_i) = X_{i_1}, \sigma(X_{i_1}) = X_{i_2}, \dots, \sigma(X_{i_j}) = X_j$, de pseudosommets correspondant à des orbites dans les graphes réduits \tilde{G}_{k_i} .

On pose alors $e(x_i) = e(X_{i_1}) = \dots = e(X_{i_j}) = X_j$.

Si $X \in \tilde{G}_k \cap \tilde{T}_k$, alors $e(X) = X$.

(figure 2.3)

Définition 2.1

Un pseudosommet X tel que $\sigma(X)=X$ est dit externe.

Définition 2.2

Soit $x_i \in V$ et $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_j}, X_j$ la suite de pseudosommets telle que

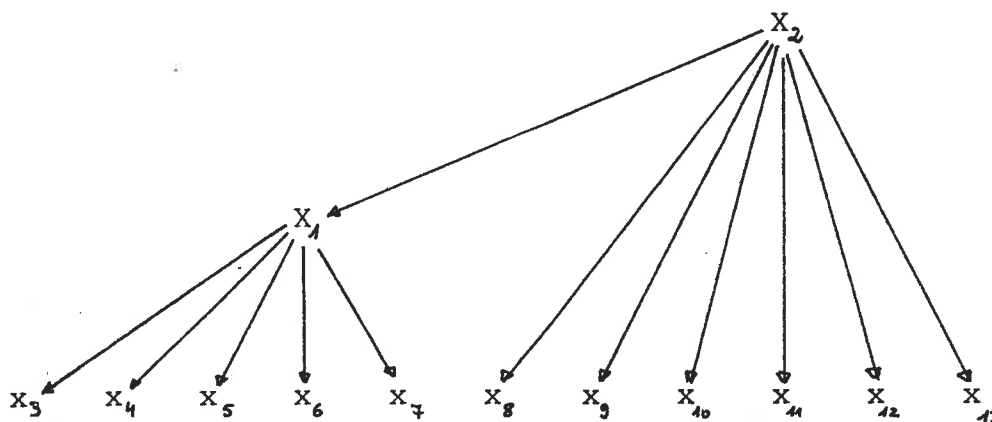
$$\sigma(x_i) = X_{i_1}, \sigma(X_{i_1}) = X_{i_2}, \dots, \sigma(X_{i_j}) = X_j.$$

Alors $\text{jint}(X) = X_{i_j}$ pour $X = x_i, X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_j}, X_j$.

La structure d' un pseudosommet externe X_j peut être représentée par une arborescence A définie de la façon suivante:

1. la racine de A est le pseudosommet X_j en question,
2. les sommets non terminaux de A sont tous les pseudosommets X_i tels que $\ell(X_i) = X_j$; les successeurs immédiats de tout sommet X de A sont tous les sommets et pseudosommets X_l tels que $\sigma(X_l) = X$,
3. les sommets terminaux de A sont tous les sommets x de G tels que $\ell(x) = X_j$.

La suite de la définition 2.2 est alors représentée dans A par l'unique chemin joignant x_i à X_j (voir la figure 2.3bis illustrant l'arborescence A associée à l'orbite B de l'exemple du chapitre I, §1.4).



$\sigma(x_3)=X_1, \sigma(X_1)=X_2, e(x_3)=e(X_1)=X_2, \text{jint}(x_3)=X_1.$

Arborescence A associée à l'orbite B_2 de l'exemple du Chapitre I, §1.4.

figure 2.3bis

2.3 Représentation des arêtes du couplage \tilde{M}_k : marques match.

Si $(X, Y) \in \tilde{M}_k$, alors $\text{match}(X) = y$ et $\text{match}(Y) = x$,

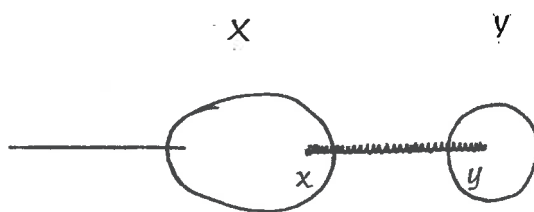
où $x, y \in G$ sont définis de la façon suivante :

à une des recherches précédentes d'un arbre alterné augmentant, il y a eu un transfert de couplage qui a permis de coupler X et Y ; supposons que cela ait eu lieu dans $(\tilde{G}_n, \tilde{T}_n)$; nécessairement $X, Y \in \tilde{T}_n$ et supposons que $m(X) = 0$, avant que la chaîne alternée augmentante ne soit trouvée dans \tilde{T}_n .

Alors $x = m(Y)$,

$$y = \begin{cases} \text{ext}_1(B) & \text{si } Y \text{ est un pseudosommet et } B \text{ l'orbite lui} \\ & \text{correspondant.} \\ y & \text{sinon.} \end{cases}$$

(figure 2.4)



Marques match des pseudosommet.

figure 2.4

2.4 Reconnaissance de la parité des sommets

Soit $(\tilde{G}_k, \tilde{T}_k, \tilde{M}_k)$ l'arbre alterné en cours de construction, et $X \in \bigcup_{i=0} V(\tilde{G}_i)$

- si $\sigma(X) \neq X$ alors $X \notin V(\tilde{G}_k)$;
- si $\sigma(X) = X$ alors
 - . si $m(X) = 0$ et $\text{match}(X) = 0$, X est la racine de \tilde{T}_k ,
 - . si $m(X) = 0$ et $\text{match}(X) \neq 0$, X est un sommet pair de \tilde{T}_k , autre que la racine,
 - . si $m(X) > 0$, X est un sommet impair de \tilde{T}_k .

2.5 Affectation des marques ext.

2.5.1 Ext₂

2.5.1.1 Supposons qu'on forme une nouvelle orbite B_ℓ dans $(\tilde{G}_k, \tilde{T}_k, \tilde{M}_k)$, et soit B_π la racine de B_ℓ (figure 2.5).

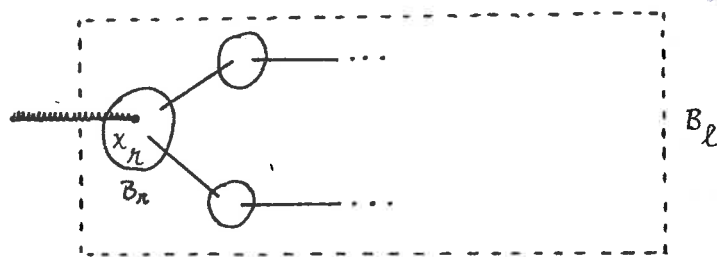


figure 2.5

On pose alors $\text{ext}_2(B_\ell) = \begin{cases} x_\pi & \text{si } x_\pi \text{ est un vrai sommet,} \\ \text{ext}_2(B_\pi) & \text{sinon...} \end{cases}$

(figure 2.5).

2.5.1.2 Dans tout transfert de couplage ext_2 peut être modifié.

Il y a 2 cas possibles :

A. Le pseudosommet x_ℓ image de B_ℓ est pair et soit $x_i = \text{ext}_2(B_\ell)$.

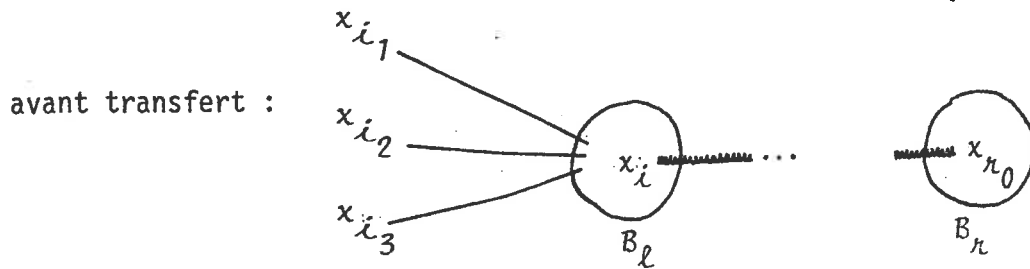


figure 2.6 a

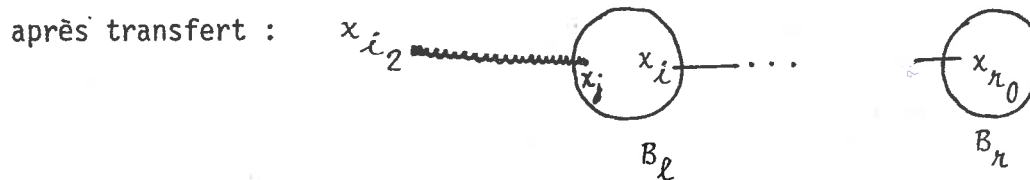
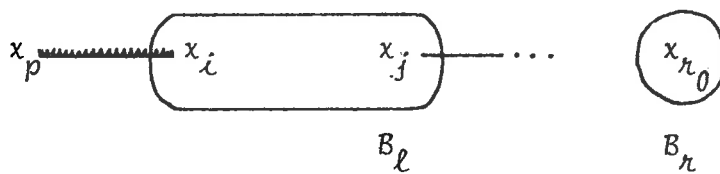


figure 2.6 b

On pose $\text{ext}_2(B_\ell) := m(x_{i2})$ (figure 2.6 a et 2.6 b)

B. Le pseudosommet x_ℓ image de B_ℓ est impair,
 et soit $x_i = \text{ext}_2(B_\ell)$, $x_j = \text{ext}_1(B_\ell)$.

avant transfert :



On a alors $\text{ext}_2(B_\ell) = x_i$,
 $\text{ext}_1(B_\ell) = x_j$,

figure 2.7 a

après transfert

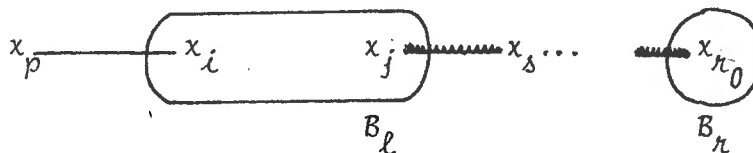


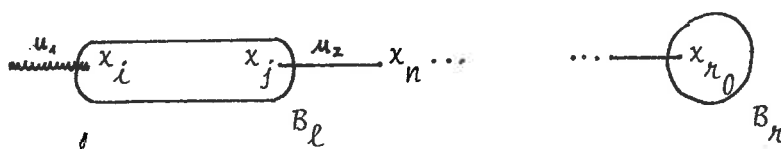
figure 2.7 b

On pose $\text{ext}_2(B_\ell) := \text{ext}_1(B_\ell) = x_j$ (figures 2.7 a et 2.7 b).

2.5.2 Ext₂

Quand un pseudosommet est marqué impair, alors nécessairement il existe exactement 2 arêtes de $(\tilde{G}_k, \tilde{T}_k, \tilde{M}_k)$ incidentes à ce pseudosommet (propriété 1.3, Chapitre I) :

- une arête $u_1 \in E(\tilde{G}_k) \cap \tilde{M}_k$ -son extrémité dans le pseudosommet est donnée par la marque ext₂;
- une arête $u_2 \in E(\tilde{G}_k) - \tilde{M}_k$ et c'est son extrémité dans le pseudosommet qu'on mémorise dans ext₁. (figure 2.8)



Si on marque x_l , l'image de B_l dans $(\tilde{G}_k, \tilde{T}_k, \tilde{M}_k)$, impair, c'est qu'il existe une arête $u_2 = (x_n, x_j) \in E(\tilde{G}_k) - \tilde{M}_k$ telle que $e(x_j) = x_l$.

Alors $ext_1(B_l) := x_j$.
figure 2.8

2.6 Modification des marques lors de la formation des orbites

- 2.6.1 Les marques m ne sont pas modifiées.
- 2.6.2 Les marques ext et δ ne sont pas modifiées non plus.
- 2.6.3 Seules les marques σ et e sont réactualisées :
Soit B_l une nouvelle orbite dans $(\tilde{G}_k, \tilde{T}_k, \tilde{M}_k)$:
 $\forall X \in V(B_l) \quad \sigma(X) := x_l, \quad e(X) := x_l$.
 $\forall X \in V(\tilde{G}_n), n < k, \quad X \in V(B_l) : e(X) := x_l$.

2.7 Transferts de couplage

Lorsque la construction de l'arbre alterné se termine par la mise en évidence d'un arbre alterné augmentant, et supposons que cela ait lieu pour $(\tilde{G}_k, \tilde{T}_k, \tilde{M}_k)$, on effectue un transfert de couplage dans le graphe contracté \tilde{G}_k et non dans le graphe original, *i.e.* on ne réécclate pas les pseudosommets successifs construits depuis le début de la construction de l'arbre alterné actuel; plus précisément ce réécclatement, c'est à dire le rétablissement des couplages internes des pseudosommets a lieu :

- soit à la fin de l'algorithme,
- soit par le réécclatement des pseudosommets impairs, lorsque ce sera nécessaire (cas de l'algorithme de couplage de poids maximal : poids μ devenu nul).

Il faut montrer que les marques (m , ext, match) permettent de reconstituer les chaînes alternées augmentantes.

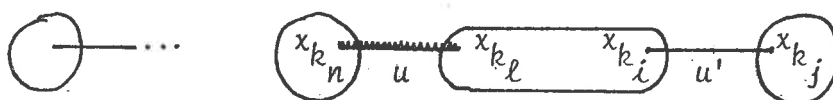
Résultat 2.1

Soit \tilde{G}_{k_0} le graphe contracté final obtenu au moment de la détection de l'arbre alterné augmentant \tilde{T}_{k_0} , (m , ext, f, match) étant les marques des sommets de \tilde{T}_{k_0} . Soit $\mu^- = \mu(x_0, x_n)$ la chaîne alternée augmentante dans \tilde{T}_{k_0} .

Le système de marques (m , ext, match) permet de reconstituer μ^- dans $(\tilde{G}_{k_0}, \tilde{T}_{k_0})$.

DEMONSTRATION

□ Soit $u' = (x_{k_i}, x_{k_j})$ une arête de $\tilde{T}_{k_0} \cap \mu^-$; il faut montrer que le système de marques $(m, \text{ext}, \text{match})$ permet de déterminer l'arête u précédant u' sur μ^- (en prenant comme origine de la chaîne alternée augmentante la racine de l'arbre alterné augmentant \tilde{T}_{k_0}).
(figure 2.9)



x_n
La racine de \tilde{T}_{k_0}

$x_n = e(x_{k_n})$ $x_i = e(x_{k_i})$ $x_j = e(x_{k_j})$
figure 2.9ⁿ

On montre cela en considérant tous les cas possibles.

1. $x_i = e(x_{k_i})$ impair, i.e. $m(x_i) > 0$, et $u' \in \tilde{M}_{k_0}$.
 - 1.1 x_i sommet vrai, i.e. $\sigma(x_i) = x_i$ et $x_i \in V(G)$ (figure 2.10),
donc $x_{k_i} = x_i$.

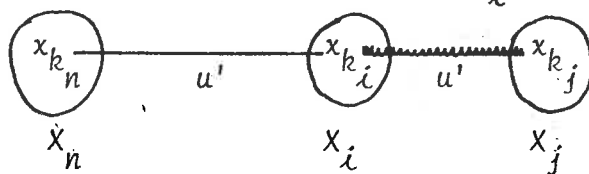


figure 2.10

Alors $u' = (x_{k_n}, x_{k_i})$, où $x_{k_n} = m(x_{k_i})$.

- 1.2 x_i est l'image d'une orbite, i.e. $x_i \notin V(G)$ (figure 2.11)

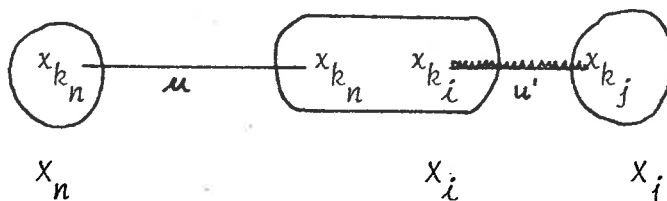


figure 2.11

X_i étant un pseudosommet impair, image d'une orbite B_i , la marque $\text{ext}_1(B_i) \neq 0$ (§ 2.5.2) donne le sommet de contact de B_i avec $\mu^-(X_0, X_i)$.

Alors $u' = (x_{k_n}, x_{k_\ell})$, où

$$x_{k_n} = m(B_i)$$

$$x_{k_\ell} = \text{ext}_1(B_i).$$

2. $X_i = e(x_{k_i})$ pair, i.e. $m(X_i) = 0$, et $u' \in \tilde{T}_{k_0} - \tilde{M}_{k_0}$.

2.1 X_i sommet vrai, i.e. $\sigma(X_i) = X_i$, $X_i \in V(G)$ et donc $x_{k_i} = X_i$ (figure 2.1).

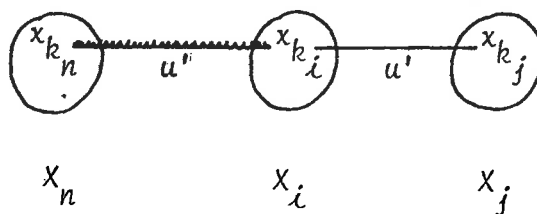


figure 2.12

$u' = (x_{k_n}, x_{k_i})$, où $x_{k_n} = \text{match}(x_{k_i})$.

2.2 X_i pseudosommet, image d'une orbite B_i , i.e. $X_i \notin V(G)$ (figure 2.1).

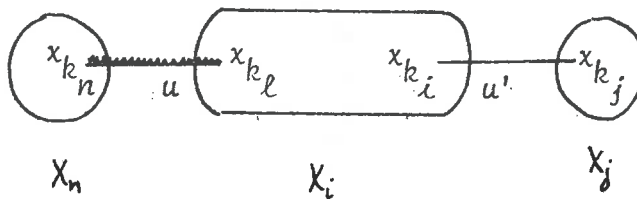


figure 2.12

La marque $\text{ext}_2(B_i) \neq 0$ (§1.5.1) donne le sommet de contact de B avec $\mu^+(X_0, X_i)$ Alors $u'' = (x_{k_n}, x_{k_\ell})$, où

$$x_{k_n} = \text{match}(X_i),$$

$$x_{k_\ell} = \text{ext}_2(B_i).$$

□

2.8 Rééclatement des pseudosommets externes

2.8.1 Procédure générale.

Soit X_ℓ un pseudosommet externe dans $(\tilde{G}_k, \tilde{T}_k, \tilde{M}_k)$, image d'une orbite B_ℓ .

Après des transferts de couplage successifs, la racine initiale de B_ℓ peut ne plus correspondre à la racine actuelle : en effet chaque transfert de couplage a lieu dans le graphe $(\tilde{G}_k, \tilde{T}_k, \tilde{M}_k)$ correspondant, et non dans le graphe original (§ 2.7).

2.8.1.1 La racine initiale de B_ℓ est le sommet X_{old} tel que :
 $X_{old} \in V(B_\ell)$, $\sigma(X_{old}) = X_\ell$ et $\text{match}(X_\ell) \notin V(B_\ell)$.

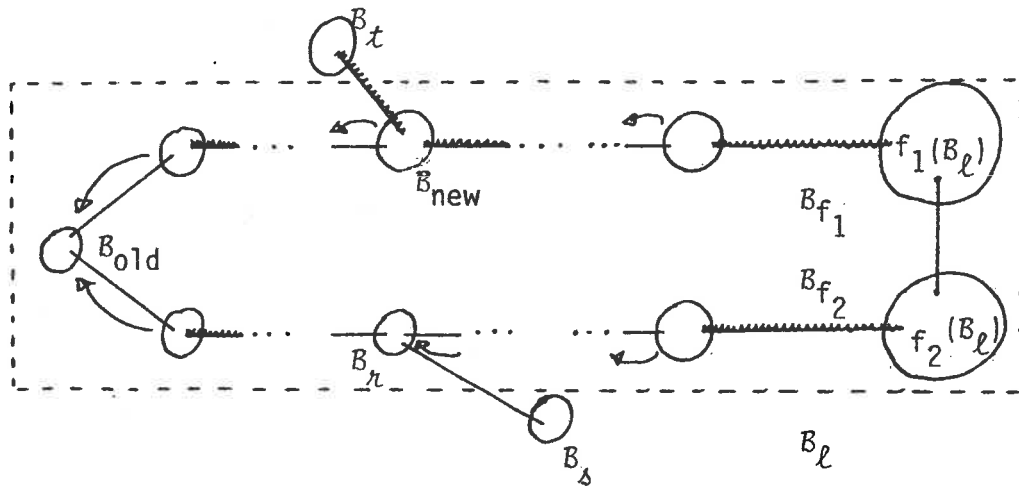
2.8.1.2 La racine actuelle de B_ℓ est le sommet X_{new} tel que :
 $X_{new} \in V(B_\ell)$, $X_{new} = \text{jint}(\text{ext}_2(X_\ell))$.

2.8.1.3 Le rétablissement du couplage interne de B_ℓ , compatible avec \tilde{M}_k , consiste à effectuer un transfert de couplage entre X_{new} et X_{old} .

Dans tout ce qui suit on suppose que B_{new} se trouve sur la branche $\mu^+(X_{f1}, X_{old})$, où $X_{f1} = \text{jint}(f_1(X_\ell))$; tous les raisonnements présentés ici se font de manière symétrique pour le cas où B_{new} se trouverait sur l'autre branche du cycle B_ℓ , i.e.

$\mu^+(X_{f2}, X_{old})$, où $X_{f2} = \text{jint}(f_2(X_\ell))$.

Soit $X_n = \text{jint}(\text{ext}_1(X_\ell))$, $X_t = e(\text{match}(X_\ell))$, $X_s = e(m(X_\ell))$;
 (voir figure 2.13)



Les flèches indiquent les 2 chaînes de parcours du cycle B_ℓ déterminées par les marques m et ext .

figure 2.13

REMARQUE 1

Les marques m des sommets $V(B_\ell)$ permettent de reconstituer les 2 sous-chaînes suivantes du cycle B_ℓ : $\mu^+(x_{f1}, x_{old}), \mu^+(x_{f2}, x_{old})$. (Sur la figure 2.1.3 les flèches indiquent ces 2 sous-chaînes).

LEMME 2.1

Le système de marques m, ext, δ de B_ℓ et de $V(B_\ell)$ permettent de reconstituer la sous-chaîne de B_ℓ $\mu^+(x_{new}, x_{old})$ - i.e. la sous-chaîne de transfert de couplage (§2.8.3)

- En effet, par définition de B_ℓ et de la parité des sommets :
 - a) si B_{new} était pair lors de la formation de l'orbite B_ℓ (i.e. $m(B_{new}) = 0$) alors $\mu^+(x_{new}, x_{old})$ est une sous-chaîne de $\mu^+(x_{f1}, x_{old})$
 - b) si B_{new} était impair ($m(B_{new}) > 0$), alors $\mu^+(x_{new}, x_{old}) = \mu^-(x_{f1}, x_{new}) \dot{+} (\delta^1(B_\ell), \delta^2(B_\ell)) \dot{+} \mu^+(x_{f2}, x_{old})$

En vertu de la remarque 1 le lemme est donc vrai dans les 2 cas.

□

2.8.1.4 Soit la modification suivante des marques m des sommets $X_p \in V(B_\ell)$:

$$\forall X_p \in \mu^+(X_{\text{new}}, X_{\text{old}})$$

1. si $m(X_p) = 0$, alors $m'(X_p) := \text{match}(X_p)$

(il s'agit ici des anciennes valeurs match, celles d'avant le transfert de couplage effectué sur $\mu^+(X_{\text{new}}, X_{\text{old}})$),

2. si $m(X_p) > 0$, alors $m'(X_p) := 0$,

$$\forall X_p \in V(B_\ell) - \mu^+(X_{\text{new}}, X_{\text{old}}),$$

$$m'(X_p) := m(X_p).$$

RESULTAT 2.2

Les nouvelles marques m' , ext, match induites par le transfert de couplage sur $\mu^+(X_{\text{new}}, X_{\text{old}})$ et par la modification 2.8.1.4. permettent de reconstituer la chaîne $\mu^+(X_{\text{new}}, X_\pi)$.

□ La démonstration se fait par considération de tous les cas possibles de parité de X_{new}, X_π .

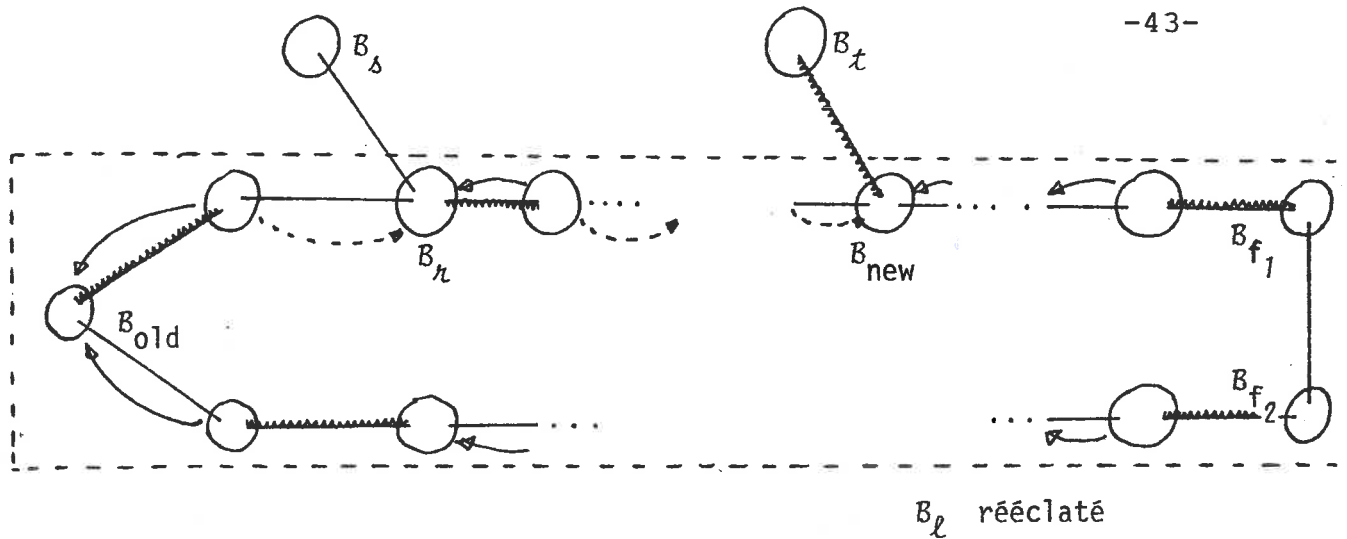
1. Supposons que X_{new} était marqué pair lors de la formation de l'orbite B_ℓ , i.e. $m(X_{\text{new}}) = 0$.

1.1 Si X_π était marqué pair ($m(X_\pi) = 0$) alors :

1.1.1 Si $X_\pi \in \mu^+(X_{\delta 1}, X_{\text{old}})$ et $\mu^+(X_{\delta 1}, X_{\text{new}})$ est une sous-chaîne de $\mu^+(X_{\delta 1}, X_\pi)$, alors

$\mu^+(X_{\text{new}}, X_\pi) = \mu^+(X_\pi, X_{\text{new}})$, or $\mu^+(X_\pi, X_{\text{new}})$ est une sous-chaîne de $\mu^+(X_{\text{old}}, X_{\text{new}})$ que les marques m' obtenues après les modifications 2.8.1.4 permettent de reconstituer.

(voir figure 2.14)



- . Les flèches \curvearrowright donnent le sens du parcours de B_ℓ déterminé par les marques m ,
- . les flèches $\cdots\curvearrowright$ donnent le sens du parcours de B_ℓ déterminé par les marques modifiées m' ,
- . les arêtes couplées correspondent au couplage obtenu après transfert de couplage effectué sur B_ℓ .

figure 2.14

1.1.2 Si $x_n \in \mu^+(x_{f1}, x_{old})$ et $\mu^+(x_{f1}, x_n)$ une sous-chaîne de $\mu^+(x_{f1}, x_{new})$,
 alors $\mu^+(x_{new}, x_n) = \mu^+(x_n, x_{new})$ et $\mu^+(x_n, x_{new})$ est une

sous-chaîne de $\mu^+(x_{f1}, x_{new})$ que les marques m permettent de reconstituer.

1.1.3 Si $x_n \in \mu^+(x_{f2}, x_{old})$, alors

$$\mu^+(x_{new}, x_n) = \mu^+(x_n, x_{old}) \dot{+} \mu^+(x_{old}, x_{new}), \text{ or}$$

$$\mu^+(x_n, x_{old}) \text{ est une sous-chaîne de } \mu^+(x_{f2}, x_{old}).$$

1.2. Si x_n était marqué impair ($m(x_n) > 0$), alors

1.2.1 si $x_n \in \mu^+(x_{f1}, x_{old})$ et $\mu^+(x_{f1}, x_{new})$ est une sous-chaîne de $\mu^-(x_{f1}, x_n)$, alors

$$\mu^+(x_{new}, x_n) = \mu^+(x_{f1}, x_{new}) \dot{+} \mu^+(x_{f2}, x_{old}) \dot{+} \mu^-(x_{old}, x_n) \dot{+} (f1(B_\ell), f2(B_\ell));$$

$$\mu^-(x_{old}, x_n) \text{ est une sous-chaîne de } \mu^+(x_{old}, x_{new}).$$

1.2.2 Si $x_n \in \mu^+(x_{f1}, x_{old})$ et $\mu^-(x_{f1}, x_n)$ est une sous-chaîne de $\mu^+(x_{f1}, x_{new})$, alors :

$$\mu^+(x_{new}, x_n) = \mu^-(x_{f1}, x_n) \dot{+} \mu^+(x_{f2}, x_{old}) \dot{+} \mu^+(x_{old}, x_{new}) \dot{+} (\delta_1(B_\ell), \delta_2(B_\ell)).$$

1.2.3 Si $x_n \in \mu^+(x_{f2}, x_{old})$, alors :

$$\mu^+(x_{new}, x_n) = \mu^-(x_{f2}, x_n) \dot{+} \mu^+(x_{f1}, x_{new}) \dot{+} (\delta_1(B_\ell), \delta_2(B_\ell));$$

$\mu^-(x_{f2}, x_n)$ est une sous-chaîne de $\mu^+(x_{f2}, x_{old})$.

2. On suppose maintenant que x_{new} était marqué impair à la formation de B_ℓ , i.e. $m(x_{new}) > 0$.

2.1 Si x_n était marqué pair ($m(x_n) = 0$), alors

2.1.1 si $x_n \in \mu^+(x_{f1}, x_{old})$ et $\mu^+(x_{f1}, x_n)$ est une sous-chaîne de $\mu^-(x_{f1}, x_{new})$, alors

$$\mu^+(x_{new}, x_n) = \mu^+(x_{f1}, x_n) \dot{+} \mu^+(x_{old}, x_{f2}) \dot{+} \mu^-(x_{new}, x_{old}) \dot{+} (\delta_1(B_\ell), \delta_2(B_\ell)).$$

2.1.2 si $x_n \in \mu^+(x_{f1}, x_{old})$ et $\mu^-(x_{f1}, x_{new})$ est une sous-chaîne de $\mu^+(x_{f1}, x_n)$ alors

$$\mu^+(x_{new}, x_n) = \mu^-(x_{f1}, x_{new}) \dot{+} \mu^+(x_{old}, x_{f2}) \dot{+} \mu^+(x_n, x_{old}) \dot{+} (\delta_1(B_\ell), \delta_2(B_\ell)),$$

$\mu^+(x_n, x_{old})$ est une sous-chaîne de $\mu^-(x_{new}, x_{old})$.

2.1.3 Si $x_n \in \mu^+(x_{old}, x_{f2})$ alors

$$\mu^+(x_{new}, x_n) = \mu^+(x_n, x_{f2}) \dot{+} \mu^-(x_{f1}, x_{new}) \dot{+} (\delta_1(B_\ell), \delta_2(B_\ell)),$$

or $\mu^+(x_n, x_{f2})$ est une sous-chaîne de $\mu^+(x_{old}, x_{f2})$.

2.2 Si x_n était marqué impair ($m(x_n) > 0$) alors :

2.2.1 Si $x_n \in \mu^+(x_{f1}, x_{old})$ et $\mu^-(x_{f1}, x_n)$ est une sous-chaîne de $\mu^-(x_{f1}, x_{new})$, alors :

$\mu^+(x_{new}, x_n) = \mu^+(x_n, x_{new})$, $\mu^+(x_n, x_{new})$ étant une sous-chaîne de $\mu^-(x_{f1}, x_{new})$.

2.2.2 Si $x_n \in \mu^+(x_{f1}, x_{old})$ et $\mu^-(x_{f1}, x_{new})$ est une sous-chaîne de $\mu^-(x_{f1}, x_n)$ alors

$\mu^+(x_{new}, x_n)$ est une sous-chaîne de $\mu^-(x_{f1}, x_{new})$.

2.2.3 Si $x_n \in \mu^+(x_{f2}, x_{old})$ alors :

$$\mu^+(x_{new}, x_n) = \mu^-(x_{old}, x_n) \dot{+} \mu^-(x_{new}, x_{old}),$$

$\mu^-(x_{old}, x_n)$ étant une sous-chaîne de $\mu^+(x_{old}, x_{f2})$.

□

2.8.2 Rééclatement de tous les pseudosommets à la fin de l'algorithme

Lorsque les conditions d'optimalité sont vérifiées pour un certain arbre alterné \tilde{T}_k et le couplage \tilde{M}_k correspondant il faut procéder au rééclatement de tous les pseudosommets :

1. Le lemme 2.1 garantit que le système de marques m , ext , δ , permet de reconstituer toute sous-chaîne de transfert de couplage à l'intérieur des pseudosommets externes dans $(\tilde{G}_k, \tilde{T}_k, \tilde{M}_k)$.

Si B_ℓ est un pseudosommet externe, alors le transfert a lieu sur la chaîne $\mu^+(X_{\text{new}}, X_{\text{old}})$; il n'est pas nécessaire de déterminer au préalable pour B_ℓ le sommet X_{old} : la chaîne $\mu^+(X_{\text{old}}, X_{\text{new}})$ débute nécessairement par l'arête couplée incidente à X_{new} .

2. Les racines des pseudosommets pseudoexternes de la chaîne $\mu^+(X_{\text{new}}, X_{\text{old}})$ sont réactualisées (§2.5.1.2).

3. Les marques σ et e de tous les sommets de B_ℓ sont réactualisées :

$\forall X_\delta$ tel que $e(X_\delta) = X_\ell$:

$$e(X_\delta) := \text{jint}(X_\delta),$$

$$\sigma(X_\delta) := \begin{cases} X_\delta & \text{si } \sigma(X_\delta) = X_\ell \\ \sigma(X_\delta) & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Le graphe $(\tilde{G}_{k_1}, \tilde{T}_{k_1}, \tilde{M}_{k_1})$ obtenu après rééclatement de tous les pseudosommets externes dans $(\tilde{G}_k, \tilde{T}_k, \tilde{M}_k)$ peut contenir de nouveaux pseudosommets : on procède alors à leur rééclatement, et ce jusqu'à l'obtention de $(\tilde{G}_0, \tilde{T}_0, \tilde{M}_0) = (G, T, M)$.

Remarque

Le calcul de *jint* se fait de la façon suivante :

on sait reconstituer dans l'arborescence A associée au pseudosommet X_ℓ (voir § 2.2.3) l'unique chemin joignant X_δ à X_ℓ grâce aux marques σ :

si $\mu[X_\delta, X_\ell] = [X_\delta, X_{\delta_1}, \dots, X_{\delta_\ell}, X_\ell]$ est ce chemin, alors

$$jint(X_\delta) = X_{\delta_\ell}.$$

Il serait lourd de faire le calcul de ce chemin pour tout X_δ ; en fait :

. on calcule *jint* (x) pour un des sommets $x \in V$ tel que $e(x) = X_\ell$ (n'importe lequel de ces sommets);

soit $X_{\delta_\ell} = jint(x)$; on pose $e(x) := X_{\delta_\ell}$; comme $jint(X_{\delta_i}) = X_{\delta_\ell}$ pour tout $X_{\delta_i} \in \mu[x, X_\ell]$, il n'est plus nécessaire de faire le calcul de *jint* pour ces pseudosommets-là; on pose $e(X_{\delta_i}) := X_{\delta_\ell}$;

. il suffit maintenant pour tous les autres sommets $x_i \in V$ tels que $e(x_i) = X$ de remonter les chemins $\mu[x_i, X_\ell]$ dans A jusqu'au premier pseudosommet X_{δ_i} tel que $e(X_{\delta_i}) \neq X_\ell$, s'il en existe; alors $jint(x_i) = X_{\delta_i}$, donc $e(x_i) := X_{\delta_i}$ et $jint(X_{\delta_k}) = X_{\delta_i}$ pour tout $i \ll k$, donc $e(X_{\delta_k}) := X_{\delta_i}$.

2.8.3 Rééclatement d'un pseudosommet B_ℓ externe impair dont le poids est devenu nul (cas de l'algorithme de couplage de poids maximal).

Comme en 2.8.2 on procède à un transfert de couplage sur la chaîne $\mu^+(X_{\text{new}}, X_{\text{old}})$. Cette fois-ci il est nécessaire de modifier les marques m' de la sous-chaîne de B_ℓ réinsérée dans l'arbre alterné \tilde{T}_k : il s'agit de la chaîne $\mu^+(X_{\text{new}}, X_h)$ (voir 2.8.1): les nouvelles marques m' de cette sous-chaîne doivent décrire la structure du nouvel arbre alterné \tilde{T}_{k_1} .

1. La modification 2.8.1.4 et le résultat 2.2 garantissent qu'on peut reconstituer $\mu^+(X_{\text{new}}, X_h)$.
2. Les marques $\text{ext}_1, \text{ext}_2$ de $\mu^+(X_{\text{new}}, X_h)$ sont réactualisées, comme décrit dans § 2.5.1.2.
3. Les sommets X_{new} et X_h deviennent impairs dans \tilde{T}_{k_1} ; les sommets constituant $\mu^+(X_{\text{new}}, X_h)$ deviennent alternativement pairs et impairs.
4. Les marques σ et e de tous les sommets de B_ℓ sont réactualisées comme décrit au point 4 de § 2.8.2.

2.9 Un exemple pour la procédure de marquage

L'exemple présenté ici illustre l'un des exemples des marques définies dans ce chapitre I, § 1.4. sont ceux du chapitre

1. Au début les valeurs initiales de

$$\forall x_i \in V \quad m(x_i) = -1 \quad \sigma(x_i) = x_i$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
match(x)	0	x_3	x_2	x_6	x_7	x_4	x_5	x_8	x_8	x_{13}	x_{11}

2. On construit un arbre alterné $m(x_1) = 0$.

3. On examine l'arête (x_1, x_2) , i
Le sommet x_2 devint impair, $m(x_2) = x_1, m(x_3) = x_2$

4. On examine successivement les
 $m(x_4) = x_3$ $m(x_6) = 0, m(x_7) = x_6$

5. En étudiant l'arête (x_6, x_7)
 $V(B_1) = \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$
les marques m et match des
la contraction de G par rapport à B_1
1. en initialisant les marques

$$m(x_{19}) = 0 \quad \sigma(x_{19}) = x_{19}$$

$$match(x_{19}) = x_2, \text{ext}_1(x_{19}) = x_2$$

$$f_1(x_{19}) = x_6, f_2(x_{19}) = x_7$$

2. en modifiant les marques σ , e des sommets de $V(B_1)$:

$$\sigma(x_3) = \sigma(x_4) = \sigma(x_5) = \sigma(x_6) = \sigma(x_7) = x_{19},$$

$$e(x_3) = e(x_4) = e(x_5) = e(x_6) = e(x_7) = x_{19};$$

les marques *match* de ces sommets restent inchangées, ainsi que leurs marques e .

L'ensemble des sommets à partir desquels peut s'effectuer le marquage est alors constitué des sommets $x_7, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$, puisque pour chacun d'eux $m(e(x)) = 0$.

6. En examinant successivement les arêtes $(x_5, x_{11}), (x_6, x_8), (x_9, x_{10})$ on marque :

. pair les sommets x_{12}, x_9, x_{13} :

$$m(x_{12}) = m(x_9) = m(x_{13}) = 0;$$

. impair les sommets x_{11}, x_8, x_{10} :

$$m(x_{11}) = x_5, m(x_8) = x_6, m(x_{10}) = x_9.$$

7. L'examen de l'arête (x_{12}, x_{13}) conduit à la formation de l'orbite B_2 ;

$$V(B_2) = \{x_{19}, x_8, x_9, x_{10}, x_{13}, x_{12}, x_{11}\};$$

. le pseudosommet correspondant à B_2 est le sommet x_{20} , dont les marques prennent les valeurs suivantes :

$$m(x_{20}) = 0, \sigma(x_{20}) = x_{20}, e(x_{20}) = x_{20},$$

$$\text{match}(x_{20}) := \text{match}(x_{19}) = x_2;$$

$$\text{ext}_1(x_{20}) = 0, \text{ext}_2(x_{20}) := \text{ext}_2(x_{19}) = x_3;$$

$$f_1(x_{20}) = x_{12}, f_2(x_{20}) = x_{13};$$

. les marques e des sommets de $V(B_2)$ sont réactualisées :

$$e(x_i) := x_{20}, i \in I = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 1\}$$

Le Tableau I donne les valeurs de toutes les marques après formation de B_2 .

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀	x ₁₁	x ₁₂	x ₁₃	x ₁₄	x ₁₅	x ₁₆	x ₁₇	x ₁₈
$m(x)$	0	x_1	0	x_3	x_3	0	0	x_6	0	x_9	x_5	0	0	-1	-1	-1	-1	
$\sigma(x)$	x_1	x_2	x_{19}	x_{19}	x_{19}	x_{19}	x_{19}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}
$e(x)$	x_1	x_2	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}
$jint(x)$	x_1	x_2	x_{19}	x_{19}	x_{19}	x_{19}	x_{19}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{20}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}
$match(x)$	0	x_3	x_2	x_6	x_7	x_4	x_5	x_9	x_8	x_{13}	x_{12}	x_{11}	x_{10}	x_{15}	x_{14}	x_{17}	x_{18}	0

a) marques des sommets vrais de G.

	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}
$m(x)$	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$\sigma(x)$	x_{20}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}
$e(x)$	x_{20}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}
$jint(x)$	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}
$match(x)$	x_2	x_2	0	0	0	0	0	0
$f_1(x)$	x_6	x_{12}	0	0	0	0	0	0
$f_2(x)$	x_7	x_{13}	0	0	0	0	0	0
$ext_1(x)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$ext_2(x)$	x_3	x_3	0	0	0	0	0	0

b) marques des pseudosommets de G.

Tableau I.

8. On examine ensuite les arêtes (x_{11}, x_{14}) et (x_{15}, x_{16}) :

$$m(x_{14}) = x_{11}, \quad m(x_{15}) = 0, \quad m(x_{16}) = x_{15}, \quad m(x_{17}) = 0.$$

9. Une nouvelle orbite B_3 est formée après l'étude de (x_{15}, x_{17}) ;

$x_3 = x_{21}$ est le pseudosommet correspondant à B_3 :

$$m(x_{21}) = 0, \quad \sigma(x_{21}) = x_{21}, \quad e(x_{21}) = x_{21};$$

$$\text{match}(x_{21}) := \text{match}(x_{15}) = x_{14};$$

$$\text{ext}_1(x_{21}) = 0, \quad \text{ext}_2(x_{21}) = x_{15};$$

$$f_1(x_{21}) = x_{15}, \quad f_2(x_{21}) = x_{17};$$

$$\sigma(x_{15}) = \sigma(x_{16}) = \sigma(x_{17}) = x_{21};$$

$$e(x_{15}) = e(x_{16}) = e(x_{17}) = x_{21};$$

10. Enfin l'examen de (x_{17}, x_{18}) conduit à la détection d'une chaîne alternée augmentante $\mu(x_1, x_{18})$.

. Les arêtes constituant $\mu(x_1, x_{18})$ dans \tilde{G}_3 (voir § 2.8) sont reconstituées de la façon suivante :

$$e_1 = (x_{17}, x_{18});$$

$$e_2 = (\text{match}(e(x_{17})), \text{ext}_2(e(x_{17}))) = (\text{match}(x_{21}), \text{ext}_2(x_{21})) = (x_{14}, x_{15});$$

$$e_3 = (m(x_{14}), x_{14}) = (x_{11}, x_{14});$$

$$e_4 = (\text{match}(e(x_{11})), \text{ext}_2(e(x_{11}))) = (\text{match}(x_{20}), \text{ext}_2(x_{20})) = (x_2, x_3);$$

$$e_5 = (m(x_2), x_2) = (x_1, x_2).$$

- Le transfert de couplage sur $\mu(x_1, x_{18}) = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5]$ implique les modifications des marques *match* :

$$\text{match}(x_{18}) = x_{17}, \text{match}(x_{21}) = x_{18},$$

$$\text{match}(x_{14}) = x_{11}, \text{match}(x_{20}) = x_{14},$$

$$\text{match}(x_1) = x_2, \text{match}(x_2) = x_1,$$

et les modifications des marques *ext* des pseudosommets externes :

$$\text{ext}_2(x_{21}) = x_{17}, \text{ext}_2(x_{20}) = x_{11}.$$

11. On procède finalement au rééclatement des pseudosommets;

- les pseudosommets externes dans \tilde{G}_3 sont les sommets x_j tels que $j > n = |V|$ et $e(x_j) = x_j$, donc x_{21} et x_{20} ;

- Pseudosommet x_{21} :

$$\text{Comme } m(\text{jint}(\text{ext}_2(x_{21}))) = 0 \text{ et } e(\text{match}(\text{jint}(\text{ext}_2(x_{21})))) = x_{21},$$

alors on effectue un transfert de couplage le long de la sous-chaîne paire μ_3^+ de B_3 joignant x_{17} à l'unique sommet x de B_3 tel que

$$\text{jint}(\text{match}(x)) \dagger x_{21}, \text{ i.e. la racine originale de } B_3 \text{ (voir } \S 2.8.1).$$

Cette sous-chaîne est reconstituée de la façon suivante :

$$e_1 = (\text{jint}(\text{ext}_2(x_{21})), \text{jint}(\text{match}(\text{ext}_2(x_{21})))) = (x_{17}, x_{16}),$$

$$e_2 = (x_{16}, \text{jint}(m(x_{16}))) = (x_{16}, x_{15});$$

$$\text{comme } e(\text{match}(x_{15})) = x_{14} \dagger x_{21}, \text{ alors } \mu_3^+ = [e_1, e_2].$$

Le transfert de couplage sur μ_3^+ implique les modifications suivantes des marques *match* :

$$\text{match}(x_{16}) = x_{15}, \text{match}(x_{15}) = x_{16};$$

$$\text{match}(x_{17}) = \text{match}(x_{21}) = x_{18};$$

. Les marques σ , e sont réactualisées :

$$\sigma(x_{15}) = x_{15}, \quad \sigma(x_{16}) = x_{16}, \quad \sigma(x_{17}) = x_{17};$$

$$e(x_{15}) = x_{15}, \quad e(x_{16}) = x_{16}; \quad e(x_{17}) = x_{17}.$$

(voir la figure 2.15).

Pseudosommet x_{20} :

. Comme $m(\text{jint}(\text{ext}_2(x_{20}))) = m(x_{11}) = 0$ et $e(\text{match}(\text{jint}(\text{ext}_2(x_{20})))) = x_{20}$ alors on effectue un transfert de couplage sur la sous chaîne paire μ_2^+ de B_2 suivante :

$$\mu_2^+ = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6], \quad \text{où}$$

$$e_1 = (\text{jint}(\text{ext}_2(x_{20})), \text{jint}(\text{match}(\text{ext}_2(x_{20})))) = (x_{11}, x_{12}),$$

$$e_2 = (x_{12}, \text{jint}(m(x_{12}))) = (x_{12}, x_{13}),$$

$$e_3 = (x_{13}, \text{jint}(m(x_{13}))) = (x_{13}, x_{10}),$$

$$e_4 = (x_{10}, \text{jint}(\text{match}(x_{10}))) = (x_{10}, x_9),$$

$$e_5 = (x_9, \text{jint}(\text{match}(x_9))) = (x_9, x_8),$$

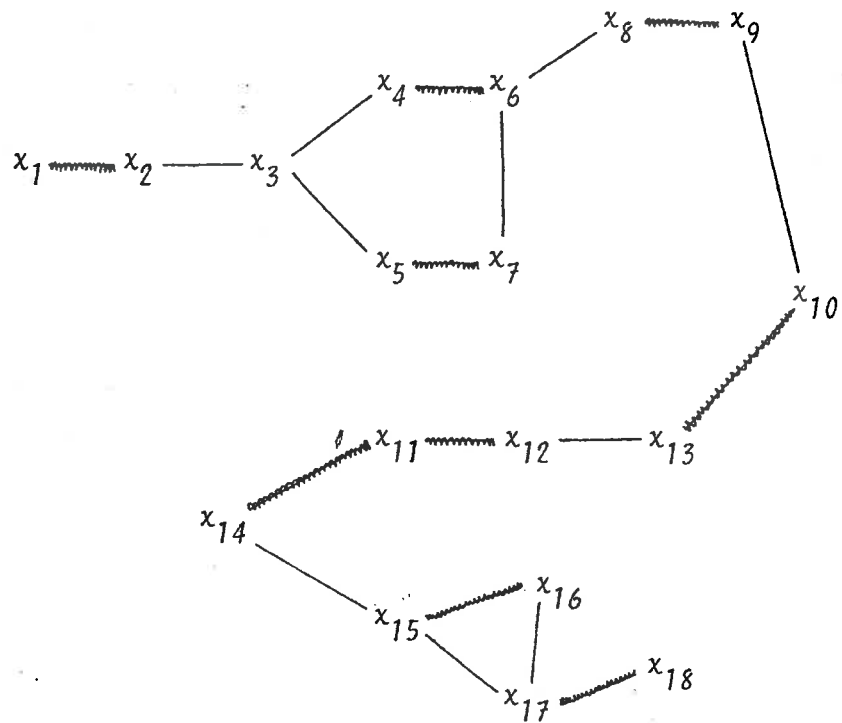
$$e_6 = (x_8, \text{jint}(m(x_8))) = (x_8, x_{19}).$$

Les marques match sont donc modifiées :

$$\text{match}(x_{12}) = x_{13}, \quad \text{match}(x_{13}) = x_{12},$$

$$\text{match}(x_{10}) = x_9, \quad \text{match}(x_9) = x_{10},$$

$$\text{match}(x_8) = m(x_8) = x_6, \quad \text{match}(x_{19}) = x_8;$$



Couplage dans G après rééclatement du pseudosommet x_{21} .

figure 2.15

- Les marques σ, e sont réactualisées :

$$\begin{aligned} \sigma(x_i) &= x_i, & e(x_i) &= x_i, \quad i = 11, 12, 13, 10, 9, 8, 19 ; \\ e(x_i) &= x_{19}, \quad i = 3, 4, 5, 6, 7 ; \end{aligned}$$

- Enfin $\text{ext}_2(x_{19}) = x_6$.
(voir figure 2.16).

Après le rééclatement de x_{21} et x_{20} , il n'existe plus qu'un seul pseudosommet dans \tilde{G}_1 , i.e. x_{19} (car $e(x_{19}) = x_{19}$).

On procède à son rééclatement :

- Comme $m(\text{jint}(\text{ext}_2(x_{19}))) = m(x_6) = 0$ et

$$e(\text{match}(\text{jint}(\text{ext}_2(x_{19})))) = e(\text{match}(x_6)) = e(x_4) = x_{19},$$

alors on procède à un transfert de couplage le long de la sous-chaîne μ_1^+ de B_1 suivante :

$$\mu_1^+ = [e_1, e_2], \text{ où}$$

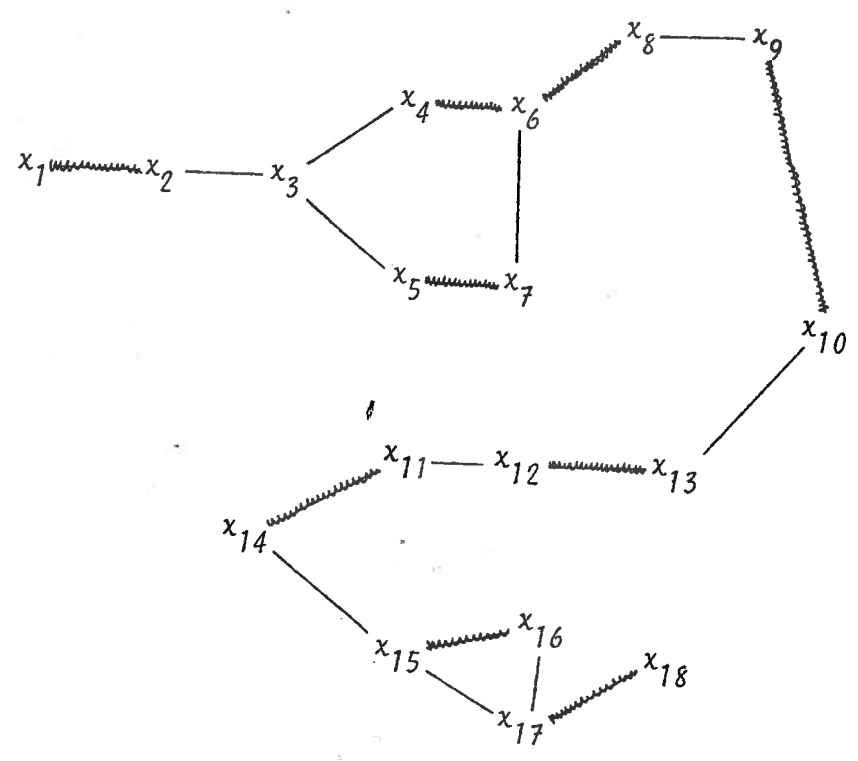
$$e_1 = (\text{jint}(\text{ext}_2(x_{19})), \text{jint}(\text{match}(\text{ext}_2(x_{19})))) = (x_6, x_4),$$

$$e_2 = (x_4, \text{jint}(m(x_4))) = (x_4, x_3).$$

Les marques *match* sont modifiées :

$$\text{match}(x_4) = x_3, \text{ match}(x_3) = x_4,$$

$$\text{match}(\text{ext}_2(x_{19})) = \text{match}(x_{19}), \text{ donc } \text{match}(x_6) = x_8.$$



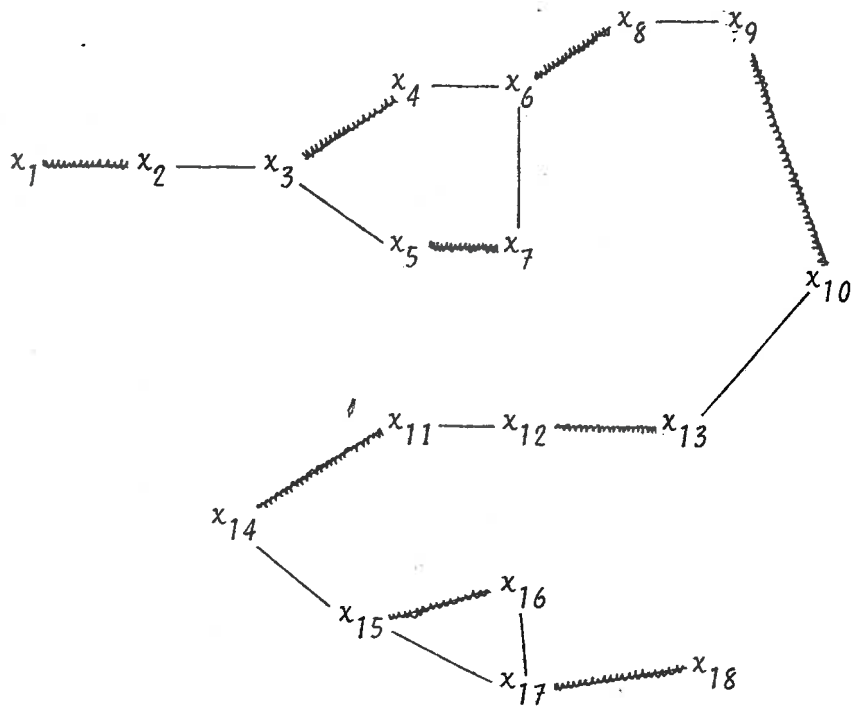
Couplage dans G après rééclatement des pseudosommets x_{21} et x_{20} .

figure 2.16

12. Le couplage résultant du rééclatement des pseudosommets est maintenant entièrement décrit par les marques *match*; Le tableau II donne les valeurs de ces marques, et la figure 2.17 illustre le couplage ainsi obtenu.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}
<i>match</i> (x)	x_2	x_1	x_4	x_3	x_7	x_8	x_5	x_6	x_{10}	x_9	x_{14}	x_{13}	x_{12}	x_{11}	x_{16}	x_{15}	x_{18}	x_{17}

Tableau II



Couplage final dans G après rééclatement des pseudosommets
 x_{21} , x_{20} et x_{19} .

figure 2.17

CHAPITRE III

ALGORITHME DE COUPLAGE DE CARDINALITE MAXIMALE

3.1 Introduction

3.1.1 L'algorithme présenté ici se base sur l'algorithme d'EDMONDS présenté au Chapitre I et sur les résultats de HOPCROFT et KARP ([11]) : il s'agit de déterminer un ensemble maximal (pour l'inclusion) de plus courtes chaînes alternées augmentantes disjointes, pour un graphe et un couplage donnés, puis après avoir effectué les transferts de couplage correspondant, réappliquer cette procédure pour le nouveau couplage ainsi obtenu, et continuer ainsi jusqu'à l'obtention d'un couplage de cardinalité maximale. .

HOPCROFT et KARP ont appliqué leurs résultats au cas de graphes bipartis, et l'algorithme présenté ici s'applique à des graphes quelconques.

3.1.2 Le principe de sélection des arêtes et sommets candidats au marquage dans l'algorithme d'EDMONDS consistait à choisir un des sommets pairs non examinés - n'importe lequel de ces sommets - et toutes les arêtes incidentes à ce sommet; dans l'algorithme présenté dans ce chapitre ce choix n'est pas arbitraire et obéit à des critères précis : ceci est réalisé grâce à des marques supplémentaires; le système de marques défini précédemment, ainsi que le principe de construction des orbites, de leur rééclairage, et celui des transferts restent identiques.

3.1.3 Le plan du chapitre est le suivant : on convient d'appeler pas de l'algorithme l'ensemble des opérations permettant de passer du couplage M_i à M_{i+1} ;

1. Définitions et notations;
2. Exposé d'un pas de l'algorithme;
3. Démonstration de la validité (convergence, obtention des ensembles maximaux de plus courtes chaînes augmentantes).
4. Calcul de la borne supérieure du nombre d'opérations.

3.2 Définitions et notations

Soit $G = (V, E)$ et M un couplage dans G .

3.2.1 $V(M) = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$, l'ensemble des sommets insaturés dans (G, M) ,
 $|V(M)| = n$.

3.2.2 L'algorithme consiste à développer une forêt alternée T dans (G, M) ;
 Les arbres alternés constituant T ont pour racines les n sommets

de $V(M)$, et sont notés T_1, T_2, \dots, T_n ; $T = \bigcup_{j=1}^n T_j$.

3.2.3 Comme précédemment, les sommets marqués par l'algorithme, appartenant donc à T , sont de 2 types : les sommets pairs et les sommets impairs;

$$\forall x_i \in T \begin{cases} m(x_i) = 0 \text{ si } \sigma(x_i) = x_i \text{ et } x_i \text{ un sommet pair,} \\ m(x_i) > 0 \text{ si } \sigma(x_i) = x_i \text{ et } x_i \text{ un sommet impair.} \end{cases}$$

. Si $m(x_i) = 0$ alors il existe une chaîne alternée paire unique reliant x_i à la racine de l'arbre T_j dont il est issu; Si x_{j_i} dénote cette racine, alors cette unique chaîne sera notée $\mu^+(x_{j_i}, x_i)$;

. De façon analogue, l'unique chaîne alternée de longueur impaire reliant un sommet x_i tel que $m(x_i) > 0$ sera notée $\mu^-(x_{j_i}, x_i)$, où x_{j_i} dénote la racine de l'arbre alterné dont x_i fait partie.

3.2.4 $\forall j = 1, \dots, n \quad O(T_j) = O^+(T_j) \cup O^-(T_j)$,

$O^+(T_j) = \{x_i \in T_j \mid x_i \text{ a eu comme première marque } m \text{ la marque paire}$

$O^-(T_j) = \{x_i \in T_j \mid x_i \text{ a eu comme première marque } m \text{ la marque impaire et sa marque actuelle } m \text{ est paire (par formation d'une orbite)}$

$$O^+(T) = \bigcup_{j=1}^n O^+(T_j), \quad O^-(T) = \bigcup_{j=1}^n O^-(T_j), \quad O(T) = O^+(T) \cup O^-(T).$$

3.2.5 $\forall j = 1, \dots, n \quad I(T_j) = \{x_i \in T_j / \sigma(x_i) = x_i \text{ et } m(x_i) > 0\}$

$$I(T) = \bigcup_{j=1}^n I(T_j)$$

3.2.6 $V(T) = I(T) \cup O(T); V(T_j) = I(T_j) \cup O(T_j); V(T) = \bigcup_{j=1}^n V(T_j)$

3.2.7 En plus des marques $e, \sigma, \text{match}, m, \text{ext}, f$ définies précédemment, les marques suivantes sont utilisées :

3.2.7.1 $\forall x_i \in O(T) \quad d(x_i)$ donne la longueur (le nombre d'arêtes) de l'unique chaîne alternée paire entre x_i et la racine de l'arbre T_j dont il est issu, i.e. $d(x_i) = \ell(\mu^+(x_{j_i}, x_i))$ où $x_{j_i} \in V(M) \cap T_j$;

l'algorithme procède de façon à ce que $d(x_i)$ donne la longueur de la plus courte chaîne alternée paire entre x_i et une des racines de T , i.e.

$$d(x_i) = \min_{x_k \in V(M)} \{\ell(\mu^+(x_k, x_i))\}.$$

3.2.7.2 $\forall x_i \in V(T_j) \quad a(x_i) = x_{j_i}, \quad x_{j_i} \in V(M) \cap T_j.$

3.2.8 L'algorithme procède par examen d'arêtes; les listes d'arêtes suivantes sont définies :

3.2.8.1 LISTE = $\{L_0, L_2, L_4, \dots, L_\alpha, \dots, L_{2N}\}$ ($N = |X|$) ;

3.2.8.2 L_α ($\alpha = 0, 2, 4 \dots 2N$), $L_\alpha = \{SL_{j_1}^\alpha, \dots, SL_{j_m}^\alpha\}$;

3.2.8.3 $SL_{j_k}^\alpha = \{(x_{j_k}, x_{l_1}), (x_{j_k}, x_{l_2}) \dots (x_{j_k}, x_{l_p})\}^m$;

$\forall (x_s, x_t) \in \text{LISTE}, x_s \in O(T)$. Si $(x_s, x_t) \in L_\alpha$, alors $(x_s, x_t) \in SL_{j_s}^\alpha$ et $d(x_s) + d(x_t) \geq \alpha$.

3.2.8.4 $SL_{j_k}^\alpha = \{(x_{j_k}, x_{l_i}) / (x_{j_k}, x_{l_i}) \in E\}$.

Les listes $SL_{j_k}^\alpha$ sont des sous-listes, propres ou non, des SL_{j_k} .

3.2.8.5 $SLI_{jk} = \{(x_{jk}, x_{l_i}), \dots, (x_{jk}, x_{l_s})\}$.

Ces listes SLI_{jk} sont définies pour tout x_{jk} tel que

$m(x_{jk}) > 0$ et $\sigma(x_{jk}) = x_{jk}$;

Si $(x_{jk}, x_{l_i}) \in SLI_{jk}$, alors $x_{l_i} \in O(T)$.

Ces listes sont utilisées pour mémoriser les arêtes incidentes aux sommets impairs de T . C'est nécessaire dans le cas où les sommets impairs sont marqués pairs par formation d'orbites; les arêtes contenues dans les SLI_{jk} doivent alors être examinées.

REMARQUE

Du point de vue programmation, le graphe G est mémorisé sous forme de listes d'adjacence : il existe pour tout sommet $x_i \in V$ une table contenant tous les sommets $x_j \in V$ tels que $(x_i, x_j) \in E$.

Toute arête (x_i, x_j) apparaît 2 fois dans ces listes : d'une part dans la liste d'adjacence du sommet x_i , d'autre part dans la liste d'adjacence de x_j .

Des tables de correspondance permettent de trouver (x_j, x_i) quand on dispose de (x_i, x_j) . Ce point est important pour la borne supérieure du nombre d'opérations de l'algorithme.

3.3 Exposé d'un pas de l'algorithme

Etape 0 (Initialisations)

$$L_\alpha = \emptyset \quad \forall \alpha = 2, 4, \dots, 2N;$$

$$L_0 = \{ SL_{i_1}, SL_{i_2}, \dots, SL_{i_n} \}, \text{ où } x_{i_j} \in V(M), \quad \forall j = 1, \dots, n;$$

$$a(x_i) = \begin{cases} x_i & \text{pour } x_i \in V(M) \\ 0 & \text{pour } x_i \in V \setminus V(M); \end{cases}$$

$$e(x_i) = \sigma(x_i) = x_i \quad \forall x_i \in V;$$

$$m(x_i) = \begin{cases} -1 & \text{pour } x_i \in V \setminus V(M) \\ 0 & \text{pour } x_i \in V(M); \end{cases}$$

$$T_j = x_{i_j} \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad T = \bigcup_{j=1}^n T_j;$$

$$d(x_i) = 0 \quad \forall x_i \in V;$$

$$\beta = 2N;$$

$$i = 0.$$

Etape 1 $i = i + 1$;
 $(x_s, x_t) = \text{LISTE}(i)$;

- 1.1 Si $\text{LISTE}(i) = \emptyset$ fin de la procédure;
- 1.2 Si $d(x_s) + d(x_t) > \beta$ fin de la procédure;
- 1.3 Si $(x_s, x_t) \notin M$, alors
 - 1.3.1 Si $m(x_t) < 0$ alors $\exists x_p = \text{match}(x_t)$ et $m(x_p) < 0$;

On pose $a(x_t) := a(x_\delta)$, $a(x_p) := a(x'_\delta)$;
 $m(x_t) := x_\delta$, $m(x_p) := 0$;
 $\alpha_1 := d(x_p) := d(x_\delta) + 2$, $\alpha := 2\alpha_1 - 2$;

On introduit dans L_α la liste SL_p .

$T := T \cup x_t \cup x_p$; aller en Etape 1.

1.3.2 Si $m(x_t) > 0$ et $\sigma(x_t) = x_t$,
 on introduit dans SL_t l'arête (x_t, x_δ) , après
 l'avoir éliminée de la liste SL_t .
 $SL_t = \{(x_t, x_i) \dots (x_t, x_\delta)\}$;
 aller en Etape 1.

1.3.3 Si $m(x_t) = 0$ ou $m(x_t) > 0$ et $\sigma(x_t) \neq x_t$:

1.3.3.1 si $e(x_\delta) = e(x_t)$ aller en Etape 1 (les
 2 sommets x_δ et x_t font partie de la même orbite);

1.3.3.2 si $e(x_\delta) \neq e(x_t)$ et aucune arête de la liste SL_t
 n'a pas encore été examinée, aller en Etape 2;
 sinon $e(x_\delta) \neq e(x_t)$ et on a déjà considéré des
 arêtes de SL_t :

1.3.3.2.1 si $a(x_\delta) = a(x_t)$ on peut former une nouvelle orbit
 l'arête (x_δ, x_t) est dite arête de type orbite.

Les marques $e, \sigma, match, ext, f$ sont modifiées de façon
 décrite au chapitre précédent.

- Les marques d des sommets marqués pairs dans B restent
 inchangées.

- Les sommets marqués impairs dans B sont marqués pairs et deviennent donc des sommets de type 0^- ; on peut calculer maintenant leurs marques d .

Ce calcul se fait ainsi :

si on note $\ell(B)$ la longueur (nombre d'arêtes) du cycle impair (orbite)B, alors les 2 relations suivantes sont vérifiées pour tout

$$(x_k, x_\ell) \in E(B) :$$

$$(1) \quad d(x_n) + d(x_\ell) = \ell(B) + 2d(x_t) - 1$$

où x_t est la racine de B et $(x_k, x_\ell) \in E(B) - M$;

$$(2) \quad d(x_n) + d(x_\ell) = \ell(B) + 2d(x_t) + 1, \text{ pour } (x_k, x_\ell) \in E(B) \cap M$$

(relations évidentes au vu de la définition d'une orbite)

si $x \in V(B)$ et $m(x) > 0$ (avant modification des marques), alors

$$y = \text{match}(x) \in V(B) \text{ et } (x, y) \in M \cap E(B)$$

et donc, en vertu de (2) et (1) :

$$\begin{aligned} d(x) &= \ell(B) + 2d(x_t) + 1 - d(y) = \\ &= d(x_s) + d(x_t) + 2 - d(y). \end{aligned}$$

Les arêtes des listes SLI_x associées aux sommets marqués impairs avant modification de ces marques sont placées dans LISTE :

$\forall x_i$ tel que $x_i \in V(B) \cap I(T) :$

1/ $\forall (x_i, x_j) \in SLI_x$, (x_i, x_j) est placé à la fin de la liste L_α , où $\alpha = d(x_i) + d(x_j)$ ($d(x_j)$ est bien défini en vertu de 1.3.2);

2/ $\forall (x_i, x_j) \in SL_x - SLI_x$, (x_i, x_j) est placé à la fin de la liste L_α , où $\alpha = 2d(x_i) - 2$.

Aller en Etape 1.

1.3.3.2.2 Sinon (donc $a(x_s) \neq a(x_t)$) on a détecté une chaîne $\mu^{-1}(a(x_s), a(x_t))$ alternée impaire joignant 2 sommets insaturés de (G, M) ; (x_s, x_t) est appelée alors arête augmentante;

$$\begin{aligned} \ell(\mu^{-1}(a(x_s), a(x_t))) &= \\ \min_{x_i, x_j \in V(M)} \ell(\mu^{-1}(x_i, x_j)) &= d(x_s) + d(x_t) + 1. \end{aligned}$$

On pose $\beta = d(x_s) + d(x_t)$.

Effectuer un transfert de couplage entre x_s et $a(x_s)$, x_t et $a(x_t)$.

$$T := T - (T_{a(x_s)} \vee T_{a(x_t)}).$$

Supprimer de L_β les arêtes (x_k, x_ℓ) telles que :

$$\begin{aligned} - a(x_k) &= \begin{cases} \text{soit } a(x_s) \\ \text{soit } a(x_t) \end{cases} \\ - a(x_\ell) &= \begin{cases} \text{soit } a(x_s) \\ \text{soit } a(x_t) \end{cases}. \end{aligned}$$

Aller en Etape 1.

1.4 Aller en Etape 1.

Etape 2 On sort de la liste SL_x l'arête (x_t, x_s) et on l'introduit dans L_α ,
avec $\alpha = d(x_s) + d(x_t)$.
Aller en Etape 1.

3.4 Démonstration de la validité de l'algorithme

3.4.1 Commentaires et premiers résultats.

Remarque 1 Les listes L_α sont telles que $\forall (x_s, x_t) \in L_\alpha$:

1. Si $x_s, x_t \in O(T)$ alors $d(x_s) + d(x_t) > \alpha$.
2. Si $x_t \notin O(T)$ alors $\alpha = 2d(x_s) - 2$.

RESULTAT 3.1 Si en examinant (x_s, x_t) on introduit de nouvelles arêtes dans LISTE, alors leur rang dans LISTE est supérieur au rang dans LISTE de (x_s, x_t) elle-même; Les arêtes étant examinées séquentiellement dans LISTE, ceci garantit qu'aucune arête ne sera omise.

DEMONSTRATION Soit α tel que $(x_s, x_t) \in SL_\alpha$.

On introduit de nouvelles arêtes dans LISTE dans le cas où :

1. on marque pair le sommet x_t non marqué (donc $x_t \in O^+(T)$), point 1.3.1 .

En vertu du point 2 de la remarque 1, $\alpha = 2d(x_s) - 2$.

On a $d(x_t) = d(x_s) + 2$ et on introduit dans L^γ la liste SL_δ

$$\gamma = 2d(x_t) - 2 = 2(d(x_s) + 2) - 2 = 2d(x_s) + 2 = \alpha + 4,$$

donc $\gamma > \alpha$.

2. On forme une nouvelle orbite B $((x_s, x_t))$ est donc une arête de type orbite, point 1.3.3.2.1). On a donc ;
 $\alpha = d(x_s) + d(x_t)$;

2.1 On introduit les arêtes des listes $SLI_{x_{t_p}}$, où $x_{t_p} \in V(B)$ est un sommet marqué impair avant formation de B . Il faut montrer que

$$d(x_{t_p}) + d(x_{t_q}) \geq d(x_s) + d(x_t) \quad \forall (x_{t_p}, x_{t_q}) \in SLI_{x_{t_p}}$$

En vertu de (1) et (2) du point 1.3.3.2.1

$$d(x_{t_p}) + d(\text{match}(x_{t_p})) = d(x_s) + d(x_t) + 2 = \alpha + 2.$$

D'autre part $d(x_{t_q}) \geq d(\text{match}(x_{t_p})) - 2$, d'où

$$d(x_{t_p}) + d(x_{t_q}) \geq d(x_{t_p}) + d(\text{match}(x_{t_p})) - 2 = \alpha + 2 - 2 = \alpha.$$

2.2 On introduit les arêtes des listes $SL_{x_{t_p}}$, où $x_{t_p} \in V(B)$ sont les sommets marqués impairs avant la formation de B , dans L_γ .

$$\gamma = 2d(x_{t_p}) - 2 \text{ et } d(x_{t_p}) \geq \max(d(x_s), d(x_t)).$$

D'autre part soit $d(x_s) = d(x_t)$, soit $d(x_s) = d(x_t) + 2$
 si $d(x_s) > d(x_t)$.

. Si $d(x_s) = d(x_t)$ alors $d(x_{t_p}) > d(x_s)$
 et $2d(x_{t_p}) - 2 > d(x_s) + d(x_t) - 2 \geq \alpha$.

.. Si $d(x_s) = d(x_t) + 2$ alors $d(x_{t_p}) \geq d(x_s)$,
 et $2d(x_{t_p}) - 2 \geq 2d(x_s) - 2 = d(x_s) + d(x_t) = \alpha$.

3. Aucune arête de $SL_{x_{t_p}}$ n'a encore été examinée (point 1.3.3.2).
 On a de nouveau $\alpha = 2d(x_s) - 2$ et (x_{t_p}, x_s) est placé dans L_γ , où $\gamma = d(x_s) + d(x_t)$ (Etape 2).

On a $d(x_{t_p}) \geq d(x_s)$, donc $\gamma \geq 2d(x_s) > 2d(x_s) - 2$, donc $\gamma > \alpha$.

□

Remarque 2 Le choix de la valeur α dans le point 2 de la remarque 1 est motivé par le point 2 de la démonstration du résultat 1.

Définition 3.4.1

La suite $(G^{(k)}, T^{(k)}, m^{(k)}, d^{(k)}, \alpha_k)$, $k = 0, 1, \dots, K$ est définie de la façon suivante :

• pour $k > 1$

1. α_k correspond à la valeur $d^{(k)}(x_i) + d^{(k)}(x_j)$ de la $(k+1)^{\text{ème}}$ arête (x_i, x_j) augmentante ou de type orbite détectée par l'algorithme.

2.
$$G^{(k)} = \begin{cases} - \text{soit } G^{(k-1)} & \text{si } (x_i, x_j) \text{ est de type orbite (cas 1),} \\ - \text{soit } G^{(k-1)} - (T^{(k-1)}_{a_i} \cup T^{(k-1)}_{a_j}) & \text{si } (x_i, x_j) \text{ est de type augmentant (cas 2),} \end{cases}$$

3.
$$T^{(k)} = \begin{cases} - \text{soit } (T^{(k-1)} \cup A^{(k-1)}) - (T^{(k-1)}_{a_i} \cup T^{(k-1)}_{a_j}) & \text{pour le cas 2,} \\ - \text{soit } T^{(k-1)} \cup A^{(k)} & \text{pour le cas 1,} \end{cases}$$

où $A^{(k)} = \{ x \in G^{(k)} / x \text{ a été marqué (pair ou impair) entre la détection de la } k\text{-ème et la } (k+1)\text{ème arête de type augmentant ou orbite dans l'algorithme} \}$;

4. $m^{(k)}$ et $d^{(k)}$ sont les marques des sommets de $T^{(k)}$.

• pour $k = 0$

1. les définitions de $\alpha^{(k)}$, $m^{(k)}$, $d^{(k)}$, $A^{(k)}$, restent valables.

2. $G^{(0)} = G$.

3. $T^{(0)} = A^{(0)}$.

K correspond à la dernière arête augmentante ou de type orbite déterminée dans un pas de l'algorithme.

Le plan de la démonstration de la validité de l'algorithme est le suivant :

1. Démonstration du fait que pour tout sommet pair l'unique chaîne alternée paire le reliant dans la forêt alternée T à la racine de T est, parmi toutes les chaînes alternées paires reliant ce sommet à un es sommets insaturés, une plus courte chaîne, *i.e.*

$$d(x) = \min_{x_i \in V(M)} \ell(\mu^+(x_i, x)).$$

On démontre pour cela que si le résultat est vrai pour tous les sommets marqués pairs avant formation d'une orbite, alors il reste vrai pour les sommets impairs devenus pairs par inclusion dans cette orbite (§ 3.4.2.1, lemme 3.1).

Ce fait, ainsi que des propriétés concernant les valeurs des marques d (§ 3.4.2.2, lemme 3.2 et corollaire 3.1) permettent alors d'obtenir le résultat par récurrence sur k (voir la définition 3.4.1).

2. Démonstration de la minimalité de la longueur des chaînes alternées augmentantes (§ 3.4.3, lemme 3.3).
3. Démonstration de la convergence de l'algorithme, ainsi que du fait que le couplage final est de cardinalité maximale (§ 3.4.4, résultat 3.3).

3.4.2 Longueurs des chaînes uniques reliant les sommets pairs de la forêt alternée T à ses racines.

3.4.2.1 Minimalité des marques des sommets des orbites

LEMME 3.1 Soit $(G^{(k)}, T^{(k)}, m^{(k)}, d^{(k)}, \alpha_k)$ et Bm_{k-1} l'orbite formée après examen de l'arête (x_i, x_j) correspondant à α_{k-1} .
(figure 4.3)

Alors $\forall x_t \in O(T^{(k-1)}) - I(Bm_{k-1})$

$$d^{(k-1)}(x_t) = \min_{x_i \in V(M)} \ell(\mu^+(x_i, x_t)) \implies$$

$$\forall x_s \in I(Bm_{k-1}) \quad d^{(k)}(x_s) = \min_{x_i \in V(M)} \ell(\mu^+(x_i, x_s)).$$

DEMONSTRATION

Soit $x_s \in I(Bm_{k-1})$, i.e. x_s était impair dans $G^{(k-1)}$.

Soit $x_t = \text{match}(x_s)$. Nécessairement $x_t \in V(Bm_{k-1})$.

En vertu de (1) et (2) de 1.3.3.2.1 de l'algorithme :

$$d^{(k-1)}(x_s) + d^{(k-1)}(x_t) - 2 =$$

$$d^{(k-1)}(x_i) + d^{(k-1)}(x_j) \text{ et donc}$$

$$d^{(k-1)}(x_s) = d^{(k-1)}(x_s) = d^{(k-1)}(x_i) + d^{(k-1)}(x_j) + 2 - d^{(k-1)}(x_t).$$

Supposons qu'il existe ℓ tel que $\exists \mu_1^+(x_\ell, x_s)$
avec $\ell(\mu_1^+) < d^{(k-1)}(x_s)$.

$$\mu_1^+(x_\ell, x_s) = \mu_2^+(x_\ell, x_n) \dot{+} (x_n, x_t) \dot{+} (x_t, x_s).$$

Il y a deux cas possibles : soit $x_n \in O(T^{(k-1)})$,
soit $x_n \notin O(T^{(k-1)})$.

1. Si $x_n \in O(T^{(k-1)})$, alors

$$\ell(\mu_1^+) = \ell(\mu_2^+) + 2 = d^{(k-1)}(x_n) + 2 < d^{(k-1)}(x_\delta), \text{ donc}$$

$$d^{(k-1)}(x_n) + 2 < d^{(k-1)}(x_i) + d^{(k-1)}(x_j) + 2 - d^{(k-1)}(x_t), \text{ donc}$$

$$d^{(k-1)}(x_n) + d^{(k-1)}(x_t) < d^{(k-1)}(x_i) + d^{(k-1)}(x_j), \text{ et en vertu du}$$

résultat 3.1 l'arête (x_n, x_t) aurait été examinée avant (x_i, x_j) ,
donnant lieu alors à un marquage différent de x_δ .

2. Si $x_n \notin O(T^{(k-1)})$, alors

$$\S 2.1 \quad x_n \notin O(T^{(k-1)}) \Rightarrow x_n \in I(T^{(k-1)}).$$

$$\text{En effet } 2d^{(k-1)}(x_t) - 2 \leq d^{(k-1)}(x_i) + d^{(k-1)}(x_j),$$

$$\text{car si } d^{(k-1)}(x_i) < d^{(k-1)}(x_j)$$

alors $d^{(k-1)}(x_i) = d^{(k-1)}(x_j) - 2$; il y a 4 cas possibles :

. si $t \neq i$ et j et si $d^{(k-1)}(x_i) = d^{(k-1)}(x_j)$ alors

$$2d^{(k-1)}(x_t) \leq d^{(k-1)}(x_i) + d^{(k-1)}(x_j),$$

. si $t = i$ ou $t = j$ et $d^{(k-1)}(x_i) = d^{(k-1)}(x_j)$ alors

$$2d^{(k-1)}(x_t) = 2d^{(k-1)}(x_i) = d^{(k-1)}(x_i) + d^{(k-1)}(x_j),$$

. si $t = i$ et $d^{(k-1)}(x_i) < d^{(k-1)}(x_j)$ alors

$$2d^{(k-1)}(x_t) = 2d^{(k-1)}(x_i) < d^{(k-1)}(x_i) + d^{(k-1)}(x_j),$$

. si $t = j$ et $d^{(k-1)}(x_i) < d^{(k-1)}(x_j)$ alors

$$2d^{(k-1)}(x_t) = 2d^{(k-1)}(x_j) = d^{(k-1)}(x_j) + d^{(k-1)}(x_i) + 2,$$

$$2d^{(k-1)}(x_t) - 2 = d^{(k-1)}(x_i) + d^{(k-1)}(x_j).$$

Le résultat 3.1 implique que l'arête (x_t, x_n) a été examinée
avant (x_i, x_j) et donc x_n , s'il n'était pas déjà marqué impair,
aurait été marqué impair ($m(x_n) = x_t$) (1.3.1 page 65)

$$2.2 \quad x_n \in I(T^{(k-1)}) \implies \mu_2^+(x_\ell, x_n) = \mu_3^+(x_\ell, x_{n_1}) + \mu_4^+(x_n, x_{n_2}) + \\ + \mu_5^-(x_{n_1}, x_{n_2}) = \mu_5^-(x_n, x_n) \\ (\text{où } x_n = a_n) \text{ (figure 4.1).}$$

Remarquons que rien n'interdit ici $x_n = x_\ell$.

$$\ell(\mu_2^+) + \ell(\mu_5^-) - 1 < d^{(k-1)}(x_\delta) - 2 + \ell(\mu_5^-) - 1;$$

$$\text{or } \ell(\mu_5^-) \leq d^{(k-1)}(x_t) + 1,$$

$$\text{donc } d^{(k-1)}(x_\delta) - 3 + \ell(\mu_5^-) \leq d^{(k-1)}(x_\delta) + d^{(k-1)}(x_t) - 2,$$

$$\text{et donc } \ell(\mu_2^+) + \ell(\mu_5^-) < d^{(k-1)}(x_\delta) + d^{(k-1)}(x_t) - 1,$$

$$\text{or } \ell(\mu_2^+) + \ell(\mu_5^-) = d^{(k-1)}(x_{n_1}) + d^{(k-1)}(x_{n_2}) + 1 \text{ et par}$$

$$\text{conséquent } d^{(k-1)}(x_{n_1}) + d^{(k-1)}(x_{n_2}) < d^{(k-1)}(x_\delta) + d^{(k-1)}(x_t) - 2$$

$$\text{Comme d'autre part } d^{(k-1)}(x_\delta) + d^{(k-1)}(x_t) - 2 = d^{(k-1)}(x_i) + d^{(k-1)}(x_j)$$

on obtient en fin de compte l'inégalité suivante :

$$d^{(k-1)}(x_{n_1}) + d^{(k-1)}(x_{n_2}) < d^{(k-1)}(x_i) + d^{(k-1)}(x_j);$$

l'arête (x_{n_1}, x_{n_2}) avait donc été étudiée avant l'arête (x_i, x_j) ;
(résultat 3.1)

• (x_{n_1}, x_{n_2}) ne pouvait pas être une arête d'augmentation, car en vertu du test 1.2 (page) on n'aurait pas examiné (x_i, x_j) par la suite;

• (x_{n_1}, x_{n_2}) était donc nécessairement une arête de type orbite; on aurait donc formé une orbite de laquelle x_n ferait partie, ce qui est contradictoire avec le fait qu'on a supposé que x_n était impair.

□

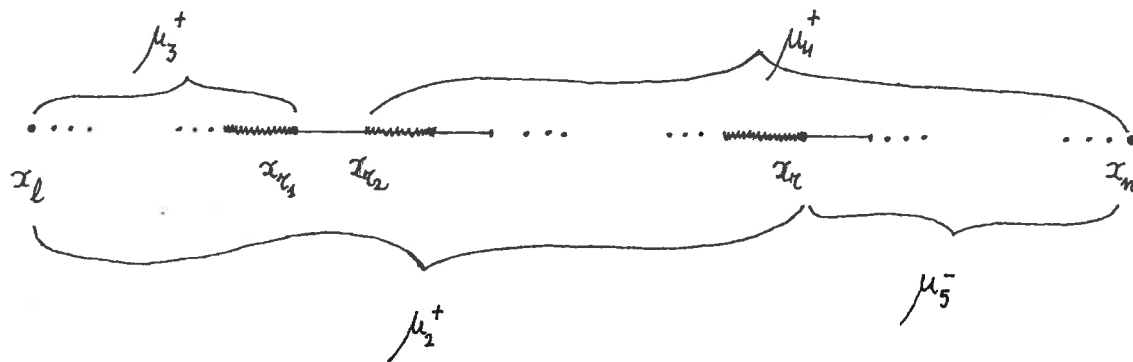


Illustration du point 1.2 de la démonstration
du Lemme 3.1.

figure 4.1

3.4.2.2 Propriétés des valeurs des marques d

LEMME 3.2 $\forall k = 1, \dots, K \{x_t \in O(T^{(k)} - T^{(k-1)}) / (d^{(k)}(x_t) > \beta_k)\} \subseteq I(B_{\ell_{k-1}})$

DEMONSTRATION

Soit (x_i, x_j) correspondant à α_k i.e.

$$\alpha_k = d^{(k)}(x_i) + d^{(k)}(x_j).$$

$$(1) \forall x \in O^+(T^{(k)} - T^{(k-1)}) \quad d^{(k)}(x) \leq \max(d^{(k)}(x_i), d^{(k)}(x_j)) + 2$$

(en vertu de 1.3.1 de l'algorithme).

$$(2) \alpha_k \geq 2 \max(d^{(k)}(x_i), d^{(k)}(x_j)) - 2 \quad (\text{car } x_i \text{ et } x_j \text{ sont pairs}),$$

$$\text{donc} \quad \frac{\alpha_k + 2}{2} \geq \max(d^{(k)}(x_i), d^{(k)}(x_j)).$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \forall x \in O^+(T^{(k)} - T^{(k-1)}) \quad d^{(k)}(x) \leq \frac{\alpha_k + 6}{2},$$

$$\text{donc} \quad d^{(k)}(x) \leq \frac{\alpha_k + 4}{2} \quad (\text{car } d^{(k)}(x) \equiv 0 \pmod{2});$$

$$\text{comme } \beta_k = 2 \cdot E \left[\frac{\alpha_k + 2}{4} \right] + 2, \text{ alors } d^{(k)}(x) \leq \beta_k.$$

Il en résulte que si $x_t \in O(T^{(k)} - T^{(k-1)})$, alors

$$\begin{aligned} d^{(k)}(x_t) > \beta_k &\Rightarrow x_t \in O(T^{(k)} - T^{(k-1)}) - O^+(T^{(k)} - T^{(k-1)}) = \\ &= I(B_{\ell_{k-1}}). \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 3.1

$$\forall x \in O(T^{(0)}) \quad d^{(0)}(x) \leq \beta_0$$

3.4.3 Démonstration de la minimalité des longueurs des chaînes augmentantes

RESULTAT 3.2

$$\forall x_s, x_t \in (G^{(k)}, T^{(k)}, m^{(k)}, d^{(k)}, \alpha_k), k = 1, \dots, K,$$

$$(1) \{ \exists x_i \in V(M) \text{ tel que } \exists \mu^+(x_i, x_s), \text{ avec } \min_{x_i \in V(M)} \ell(\mu^+(x_i, x_s)) \leq \beta_k$$

$$(2a) \Rightarrow [x_s \in o(T^{(k)}) \wedge d^{(k)}(x_s) = \min_{x_i \in V(M)} \ell(\mu^+(x_i, x_s))] \wedge$$

$$(2b) \left[\forall x_s (1) \Rightarrow (2a) \right] \Rightarrow [x_t \in o(T^{(k)}) \wedge d^{(k)}(x_t) > \beta_k \Rightarrow d^{(k)}(x_t) = \min_{x_i \in V(M)} \ell(\mu^+(x_i, x_t))],$$

$$\text{avec } \beta_k = 2E \left[\frac{\alpha_k}{4} + \frac{1}{2} \right] + 2.$$

DEMONSTRATION

Le résultat est démontré par récurrence sur k .

$$1. k = 0, o^+(T^{(0)}) = o(T^{(0)});$$

1.1 démonstration de (2a) par récurrence sur les longueurs des chaînes minimales μ^+ de (1).

1.1.1 Les seuls sommets x de $G^{(0)} = G$ pour lesquels il existe une chaîne alternée paire de longueur nulle les reliant aux racines de $T^{(0)}$ sont les racines elles-mêmes et le résultat est donc vrai.

1.1.2 On suppose le résultat vrai pour les sommets x vérifiant (1') :

$$(1') \quad \exists x_i \in V(M) \text{ tel que } \exists \mu^+(x_i, x) \text{ telle que} \\ \ell(\mu^+(x_i, x)) \leq \gamma \text{ avec } \gamma < \beta_k;$$

soit x_j vérifiant (1') avec $\gamma' = \gamma + 2$,
et soient x_{ij} et $\mu_1^+(x_{ij}, x_j)$ tels que

$$\ell(\mu_1^+(x_{ij}, x_j)) = \min_{x_i \in V(M)} \ell(\mu^+(x_i, x_j));$$

(bien sûr μ_1^+ et x_{ij} peuvent ne pas être uniques).

$$\mu_1^+(x_{ij}, x_j) = \mu_2^+(x_{ij}, x_k) \dot{+} (x_k, x_\ell) \dot{+} (x_\ell, x_j).$$

$$\ell(\mu_1^+) = \ell(\mu_2^+) + 2 \text{ et donc } \ell(\mu_2^+) \leq \gamma.$$

Par hypothèse de récurrence (interne)
 $x_k \in O(T^{(0)}) = O^+(T^{(0)})$, $d^{(k)}(x_k) = \gamma$,

et donc en vertu du résultat 4.1 $\exists SL^{\alpha}$ et l'arête (x_k, x_ℓ) qui a permis de marquer x_j pair, avec k

$$d^{(0)}(x_j) = d^{(0)}(x_k) + 2 = \gamma'.$$

1.2 En ce qui concerne (2b) : $\{x_t \in O(T^{(0)}) / d^{(0)}(x_t) > \beta_0\} = \emptyset$
en vertu du corollaire 3.1.

2. On suppose le résultat vrai pour $k-1$ et on considère $(G^{(k)}, T^{(k)}, m^{(k)}, m^{(k)}, d^{(k)}, \alpha_k)$ ($1 \leq k \leq K$).

Il y a 2 cas possibles :

2.1 Soit l'arête (x_i, x_j) correspondant à α_{k-1} ($\alpha_{k-1} = d^{(k-1)}(x_i) + d^{(k-1)}(x_j)$) était une arête augmentante;

on avait donc détecté dans $G^{(k-1)}$ une chaîne alternée augmentante entre a_i et a_j et donc

$$G^{(k)} = G^{(k-1)} - (T^{(k-1)} a_i \vee T^{(k-1)} a_j).$$

Dans ce cas $\beta_k = \beta_{k-1}$ (effectivement, en vertu du test 1.2 :

$$\alpha_k = \alpha_{k-1}); \text{ d'autre part } o(T^{(k)}) = o(T^{(k-1)}).$$

Ceci implique, par l'hypothèse de récurrence que (2a) et (2b) sont vrais pour k .

2.2 L'arête (x_i, x_j) correspondant à α_{k-1} était de type orbite.

On avait donc détecté dans $G^{(k-1)}$ une orbite $B_{\ell_{k-1}}$;

$$\text{soit } I(B_{\ell_{k-1}}) = \{x \in B_{\ell_{k-1}} / x \notin o(T^{(k-1)})\}$$

$$2.2.1 \quad x \in I(B_{\ell_{k-1}}) \Rightarrow d^{(k)}(x) = \min_{x_i \in V(M)} \ell(\mu^+(x_i, x)).$$

$$\text{En effet } x_\delta \in o(T^{(k-1)}) \Rightarrow d^{(k-1)}(x_\delta) = \min_{x_i \in V(M)} \ell(\mu^+(x_i, x_\delta)).$$

car :

. si $d^{(k-1)}(x_\delta) \leq \beta_{k-1}$ alors par l'hypothèse de récurrence (2a) garantit cette égalité :

$$\text{si } x_\delta \in o(T^{(k-1)}) \text{ alors } \exists x_i \in V(M), \mu^+(x_i, x_\delta)$$

par définition de $o(T^{(k-1)})$ et par construction des chaînes dans l'algorithme;

. si $d^{(k-1)}(x_\delta) > \beta_{k-1}$ alors l'égalité est vraie en vertu de l'hypothèse de récurrence ((2b)).

On peut donc appliquer le Lemme 3.1.

2.2.2 Démonstration de (2a) par récurrence sur les longueurs $l(\mu^+)$ des chaînes μ^+ minimales de (1) : ces longueurs sont comprises entre $\beta_{k-1} + 2$ et β_k .

. Le résultat est vrai pour $x_\delta \in G^{(k)} - O(T^{(k-1)})$

vérifiant (2') :

$$(2') \exists x_i \in V(M) \text{ tel que } \exists \mu^+(x_i, x_\delta) \text{ avec } \min_{x_i \in V(M)} l(\mu^+(x_i, x_\delta)) =$$

$$\text{avec } \gamma = \beta_{k-1} + 2 .$$

Cela se démontre de façon analogue au point 1.1.2 en appliquant l'hypothèse de récurrence (externe) aux chaînes μ_2^+ de longueur $l(\mu_2^+) = \beta_{k-1}$ dans la décomposition de μ^+ de (

. On suppose le résultat vrai pour $x_\delta \in G^{(k)} - O(T^{(k-1)})$ vérifiant (2') avec $\beta_{k-1} + 2 \leq \gamma \leq \beta_k$ (s'il en existe).

Soit x_{i_δ} et $\mu_1^+(x_{i_\delta}, x_\delta)$ tels que :

$$l(\mu_1^+(x_{i_\delta}, x_\delta)) = \min_{x_i \in V(M)} l(\mu^+(x_i, x_\delta)) ;$$

$$\mu_1^+(x_{i_\delta}, x_\delta) = \mu_2^+(x_{i_\delta}, x_t) \dot{+} (x_t, x_p) \dot{+} (x_p, x_\delta) .$$

$$l(\mu_1^+) = l(\mu_2^+) + 2 \Rightarrow l(\mu_2^+) = \gamma \Rightarrow x_t \in O(T^{(k)}) \quad (l \leq k)$$

$\Rightarrow \exists SL_t^\alpha$ et l'arête (x_t, x_p) a été examinée.

(1.3.3.2.1 de l'algorithme).

- si x_p était non marqué alors $x_\delta \in O(T^{(k)})$ avec une bonne valeur $d^{(k)}(x_\delta)$;
- si x_p était marqué impair alors $x_\delta \in O(T^{(k)})$ avec $d^{(k)}(x_\delta) \leq \gamma$; comme $\ell(\mu_1^+(x_i, x_j), x_\delta) = \gamma$ donc $d^{(k)}(x_\delta) = \gamma$;
- si x_p était pair, alors nécessairement $a(x_t) = a(x_p)$.
En effet s'il n'en était pas ainsi, les 2 chaînes $\mu^+(x_{a(x_t)}, x_t)$ et $\mu^+(x_{a(x_p)}, x_p)$ formeraient une chaîne alternée augmentante (contrairement à l'hypothèse concernant l'arête correspondant à α_{k-1}).
Il en résulte que $x_\delta \in I(B\ell_{k-1})$ et donc, en vertu de 2.2.1, $d^{(k)}(x_\delta) = \gamma$: effectivement $x_\delta \in G^{(k)} - O(T^{(k-1)})$ et $x_\delta \in B\ell_{k-1}$ avec $k_1 \leq k-1$.

2.2.3 Démonstration de (2b).

$$\{x_t \in O(T^{(k)}) - O(T^{(k-1)}) / d^{(k)}(x_t) \geq \beta_k\} \subseteq I(B\ell_{k-1})$$

(en vertu du Lemme 3.2). Le résultat vient de 2.2.1.

□

LEMME 3.3

Soit (x_i, x_j) l'arête correspondant à α_k dans

$$(G^{(k)}, T^{(k)}, m^{(k)}, d^{(k)}, \alpha_k).$$

Si (x_i, x_j) est une arête d'augmentation, alors la chaîne alternée impaire μ^- ,

$$\mu^- = \mu_1^+(x_{n_i}, x_i) + \mu_2^+(x_{n_j}, x_j) + (x_i, x_j), \text{ où } x_{n_i}, x_{n_j} \text{ sont les racines des arbres auxquels appartiennent}$$

$$x_i \text{ et } x_j \text{ (} x_{n_i} = a(x_i), x_{n_j} = a(x_j) \text{),}$$

est une plus courte chaîne augmentante dans (G, M) , i.e.

$$\ell(\mu^-) = \min_{x_n, x_\ell \in V(M)} \ell(\mu^-(x_n, x_\ell)).$$

DEMONSTRATION

Supposons qu'il existe $x_{n_1}, x_{n_2} \in V(M)$ et une chaîne $\gamma^-(x_{n_1}, x_{n_2})$ telle que $l(\gamma^-) < \alpha_k$.

Soit la décomposition suivante de $\gamma^-(x_{n_1}, x_{n_2})$:

$$\gamma^-(x_{n_1}, x_{n_2}) = \gamma_1^+(x_{n_1}, x_{l_1}) + (x_{l_1}, x_{l_2}) + \gamma_2^+(x_{n_2}, x_{l_2}), \text{ où}$$

$$\begin{aligned} x_{l_1} \in \gamma^- \text{ et } l(\gamma_1^+(x_{n_1}, x_{l_1})) = \max_{x_{l_2} \in \gamma^-} l(\gamma^+(x_{n_1}, x_{l_2})) \\ (x_{l_1} \neq x_{n_2}) \end{aligned}$$

$$\gamma^+(x_{n_1}, x_{l_2}) / l(\gamma^+(x_{n_1}, x_{l_2})) \leq \beta_k$$

(une telle décomposition existe, car $l(\gamma^-(x_{n_1}, x_{n_2})) < \beta_k$).

Par le résultat 3.2 $x_{l_1} \in O(T^{(k)})$ et $d^{(k)}(x_{l_1}) = \min_{x_i \in V(M)} l(\mu^+(x_i, x_{l_1}))$

. si $d^{(k)}(x_{l_1}) = \beta_k$, alors $\gamma^+(x_{n_2}, x_{l_2}) < \alpha_k - d^{(k)}(x_{l_1}) =$
 $= \alpha_k - \beta_k \leq \beta_k$;

(en effet $\lceil \frac{\alpha_k + 2}{4} \rceil \geq \frac{\alpha_k - 4}{4}$) ; ceci implique (résultat 3.2)

que $x_{l_2} \in O(T^{(k)})$ et donc l'arête (x_{l_1}, x_{l_2}) , une arête

d'augmentation, aurait été étudiée dans $(G^{(k_1)}, T^{(k_1)}, m^{(k_1)}, d^{(k_1)}, \alpha_{k_1})$, où $\alpha_{k_1} = d^{(k_1)}(x_{l_1}) + d^{(k_1)}(x_{l_2}) < \alpha_k$.

(contradiction avec le test 1.2 stoppant l'algorithme aux arêtes de valeur α_{k_1}).

. Si $d^{(k)}(x_{l_1}) < \beta_k$, alors $x_{l_2} = x_{n_2}$ et de nouveau l'arête (x_{l_1}, x_{l_2}) aurait déjà été examinée.

□

3.4.4 Convergence de l'algorithme et maximalité du couplage final.

RESULTAT 3.3

- (1) l'algorithme est convergent;
- (2) le couplage final M_k est un couplage de cardinalité maximale.

DEMONSTRATION

- (1) vient de la démonstration de convergence de l'algorithme d'EDMONDS et du résultat 3.1.
- (2) vient des résultats de HOPCROFT et KARP ([11]) et du résultat 3.2.

3.5 Calcul de la borne supérieure du nombre d'opérations

L'algorithme d'EDMONDS fait partie de la classe des algorithmes dits efficaces (selon la terminologie introduite par EDMONDS, [4]), *i.e.* le nombre d'opérations (additions, divisions, multiplications, tests) effectuées est fonction polynomiale et non exponentielle de la taille du graphe; si $G = (V, E)$ et $|V| = n$, alors la borne supérieure du nombre d'opérations de l'algorithme présenté dans ce chapitre est $O(n^{5/2})$.

1. Nombre d'opérations nécessaires dans les modifications des listes.
 - L'élimination d'une arête d'une liste SL_i ou SLI_j ,
 - l'insertion d'une arête dans une liste SLI_i ou L_α ,
 - l'insertion d'une liste SL_i dans L_α ,
 nécessitent $O(c)$ opérations (c étant une constante) : il s'agit de simples modifications de pointeurs.

2. La formation des orbites (voir chapitre II, § 2.2, § 2.5, § 2.6)
 - Le calcul de ext_1 et ext_2 : $O(c)$ opérations;
 - le calcul de f_1 et f_2 : $O(c)$ opérations;
 - la modification des marques σ nécessite la recherche des sommets constituant l'orbite : ceci implique l'examen d'un plus $n-1$ arêtes, chacune d'elles étant calculée en $O(c)$ opérations;
 - le calcul des marques d nécessite l'étude d'au plus $\frac{n-2}{2}$ sommets puisqu'il ne peut y avoir qu'au plus $\frac{n-2}{2}$ sommets impairs dans une forêt alternée, d'où $O(n)$ opérations;
 - les modifications des marques e impliquent l'examen d'au plus $\frac{3(n-1)}{2}$ sommets et le calcul sur chacun de ces sommets se fait en $O(c)$ opérations;

Il en résulte que la formation d'une orbite nécessite $O(n)$ opérations sur les marques; d'autre part la mise à jour des listes SLI_x (voir chap. III, § 4.2) implique $O(m)$ calculs, car il y a au plus $m-3$ arêtes dans toutes les listes SLI_x ; comme on ne peut former qu'au plus $E\left[\frac{n-1}{2}\right]$ pseudosommets dans un pas de l'algorithme - chaque orbite diminue en effet d'au moins 2 sommets le graphe courant - le nombre d'opérations sur les orbites exécutées par pas de l'algorithme est $O(n^2)$, et le nombre total de ces opérations est donc $O(n^2) \cdot O(\sqrt{n}) = O(n^{\frac{5}{2}})$.

3. Transferts de couplage.

Pour chacun des pas il est nécessaire d'examiner au plus $n-1$ arêtes, chacune d'elles étant calculée en $O(c)$ opérations (résultat 2.1). Les modifications des marques $match$ et ext_1, ext_2 nécessitent donc $O(n) \cdot O(c) = O(n)$ opérations, et le nombre total de ces opérations est donc $O(n) \cdot O(\sqrt{n}) = O(n^{\frac{3}{2}})$.

4. Rééclatement des pseudosommets

Pour chacun des pas et pour chacun des pseudosommets

- la détermination de la sous-chaîne de transfert de couplage interne se fait en $O(c)$ opérations (chap. II, § 2.8),
- les modifications des marques e et ϵ impliquent l'examen d'au plus $\frac{3(n-1)}{2}$ sommets, le calcul sur chacun de ces sommets s'effectuant en $O(c)$ opérations.

Le rééclatement d'un pseudosommet nécessite donc $O(m)$ opérations; comme il existe au plus $\frac{(n-1)}{2}$ pseudosommets, et par ailleurs les transferts de couplage internes concernent au plus m arêtes par pas de l'algorithme, par conséquent le nombre total d'opérations de ce type est $O(n^2) \cdot O(\sqrt{n}) = O(n^{\frac{5}{2}})$.

5. Arêtes de LISTE.

- Chaque arête peut apparaître au plus 2 fois dans LISTE;
- L'examen des arêtes de LISTE peut donner lieu à l'exécution d'une des sous-étapes suivantes (en dehors des sous-étapes de formation d'orbite, de transfert de couplage et de rééclairage des pseudosommets, déjà considérées):

5.1 Marquage d'un nouveau sommet pair (1.3.1 de l'algorithme);

ceci ne peut avoir lieu qu'au plus $\frac{n}{2}$ fois, puisqu'il y a au plus $\frac{n}{2}$ sommets pairs dans une forêt alternée :

- l'affectation des marques m et a nécessite $O(c)$ opérations,
- l'introduction d'une liste SL_p dans L_α nécessite $O(c)$ opérations (§.3.5.1);

au total le nombre total d'opérations de ce type est $O(n)$.

5.2 Etape 1.3.2: elle ne peut être exécutée qu'au plus $m-1$ fois,

et les modifications des listes nécessitent $O(c)$ calculs au total donc $O(n^2)$ opérations par étape, et donc $O(n^{\frac{5}{2}})$ opérations dans les $2E[\sqrt{n}] + 2$ étapes possibles de l'algorithme.

5.3 Etape 1.3.3.2; elle donne lieu à l'exécution de l'étape 2 :

ceci ne peut se produire qu'au plus $\frac{(n-1)}{2}$ fois, car il y a au plus $\frac{n-1}{2}$ sommets pairs; au total il en résulte $O(n^{\frac{3}{2}})$ opérations.

Il en résulte donc que la borne supérieure de nombre d'opérations de l'algorithme est $O(n^{\frac{5}{2}})$.

CHAPITRE IV

IMPLEMENTATION DE L'ALGORITHME

4.1 Le Programme COUPLAGE

L'algorithme présenté dans le chapitre III a été programmé en FORTRAN; appelé COUPLAGE, le sous-programme principal fait appel à 7 sous-routines; un listing est donné en annexe.

Les tests ont été effectués sur un ordinateur IBM 370/168, avec un compilateur FORTRAN G.

Si $|V| = n$ et $|E| = m$, alors la taille-mémoire utilisée par le programme COUPLAGE est $13n + \frac{n}{2} + 10m$:

$n + 4m$ mémoires pour le stockage du graphe,

$6n$ mémoires pour les marques $match, m, d, a, \sigma, e$ des sommets vrais de G ,

$\frac{7(n-1)}{2}$ mémoires pour les marques des $\left[\frac{n-1}{2} \right]$ pseudosommets possibles dans

$n + 2m$ mémoires pour les listes SLI_x ,

$n + 4m$ mémoires pour les listes L_α ,

$2n$ mémoires internes de travail.

4.2 Essais et résultats

Le programme COUPLAGE a été testé d'une part sur des graphes aléatoires, de différentes tailles et densités, d'autre part sur des graphes de type $G(6m)$ (GABOW, [7]).

4.2.1 Graphes aléatoires .

La procédure de génération a été la suivante : on choisit le nombre de sommets $|V|$ et le nombre d'arêtes $|E|$, $|E| < \binom{|V|}{2}$, du graphe $G = (V, E)$ à générer.

On fait correspondre à toute arête (x_i, x_j) du graphe complet $K_{|V|}$ possédant $\binom{|V|}{2} = \frac{|V|(|V|-1)}{2}$ arêtes, un indice n de

sorte que si $e_{n_1} = (x_{i_1}, x_{j_1})$ et $e_{n_2} = (x_{i_2}, x_{j_2})$, alors

$$n_1 < n_2 \iff i_1 < i_2 \text{ si } i_2 \neq i_1, j_1 < j_2 \text{ si } i_1 = i_2.$$

On procède alors au tirage aléatoire de $|E|$ nombres entiers dans l'intervalle $[1, \binom{|V|}{2}]$.

Les valeurs de $|V|$ ont été : 40, 100, 200, 500. Pour chaque valeur V , E variait de façon à obtenir des graphes de densités différentes; pour un couple de valeurs $|V|$, $|E|$ fixées plusieurs graphes étaient générés. Les tableaux 4.1, 4.2, 4.3 résument les résultats obtenus.

$ E $	temps CPU en 1/1000 seconde	nombre d'itérations	nombre d'orbites créées
100	0	3	3
200	0	3	0
300	30	2	1
400	45	2	1
400	62	2	6
500	42	2	0
500	37	2	0
600	47	2	1
600	74	2	1
700	60	2	0

Résultats obtenus sur des graphes aléatoires, $|V| = 40$.

Tableau 4.1

$ E $	temps 1/1000 seconde	nombre d'itération	nombre d'orbites créées
500	61	2	1
1500	155	3	1
1500	165	3	1
2500	154	5	0
2500	188	5	0
2500	195	5	0
2500	188	5	0
2500	191	5	0
2500	176	2	0
2500	190	2	0

Résultats obtenus sur des graphes aléatoires, $|V| = 100$.

Tableau 4.2

$ E $	temps moyen CPU en 1/1000 seconde
1500	163
2500	183
4500	338

Résultats moyens obtenus sur des graphes aléatoires, $|V| = 100$.

Tableau 4.3

4.2.2 Graphes de type $G(6m)$ et $\tilde{G}(6m)$.

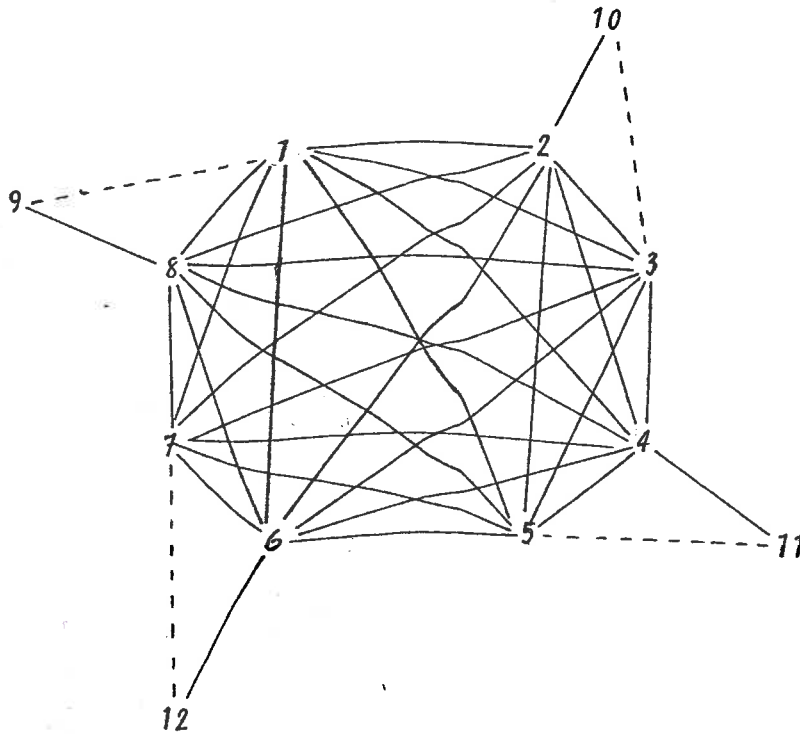
La famille de graphes de type $G(6m)$ a été définie par GABOW de la façon suivante :

$$G(6m) = (V(6m), E(6m)),$$

$$|V(6m)| = 6m,$$

$$E(6m) = E(K_{4m}) \cup \bigcup_{i=1}^{2m} (x_{4m+i}, x_{2i-1}).$$

La figure 4.1 donne un exemple d'un graphe $G(6m)$.



Graphe $G(6m)$, avec $m = 2$; $\tilde{G}(6m)$ est obtenu en ajoutant les arêtes en pointillé.

Figure 4.1

La borne théorique $O(|V|^3)$ du nombre d'opérations de l'algorithme de couplage de cardinalité maximale de GABOW est effectivement atteinte pour les graphes de type $G(6m)$; ce n'est pas le cas pour l'algorithme présenté dans cette thèse : en effet le nombre d'itérations est constant pour tout m et vaut 2.

Dans la 1^o itération $2m$ arêtes de la clique K_{4m} sont couplées; dans la 2^o itération on détecte m chaînes alternées augmentantes de longueur 4 et le couplage induit par transferts le long de ces chaînes est alors un couplage parfait, donc de cardinalité maximale. Le tableau 4.4 donne les temps du programme COUPLAGE pour m variant de 11 à 35 ($|V|$ varie alors de 66 à 210, $|E|$ de 968 à 9800).

Le programme a aussi été testé sur des graphes $G(6m)$ modifiés : La modification consiste à rajouter $2m$ arêtes de la forme

$$(x_{4m+i}, x_{2i-1})$$

$$E(\tilde{G}(6m)) = E(K_{4m}) \cup \bigcup_{i=1}^{2m} (x_{4m+i}, x_{2i-1}) \cup \bigcup_{i=1}^{2m} (x_{4m+i}, x_{2i-1}).$$

(Voir figure 4.1)

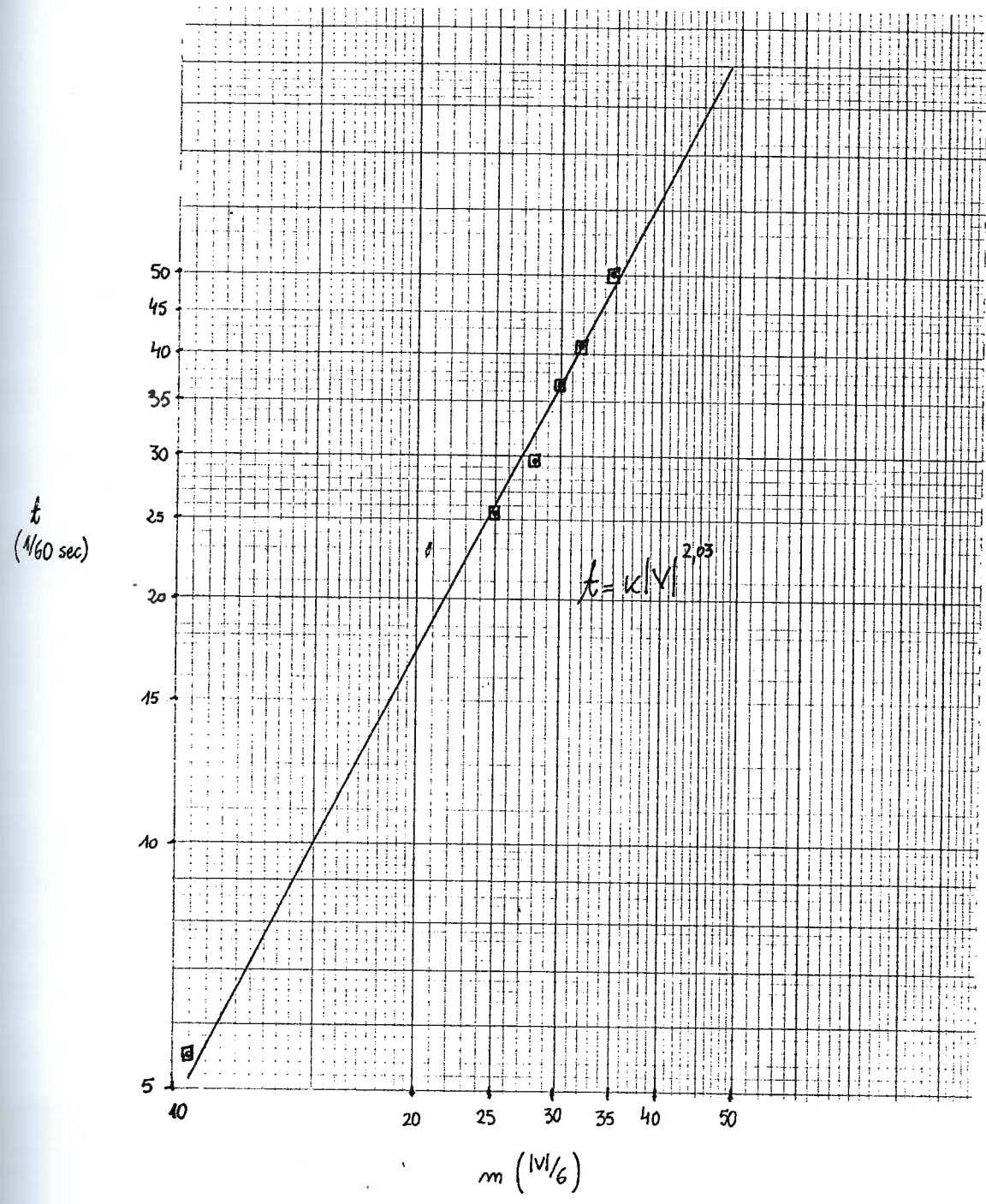
Dans ce cas le programme COUPLAGE construit dans la 2^o itération $2m$ orbites avant de trouver les m chaînes alternées augmentantes. Le tableau 4.4 donne les résultats pour $\tilde{G}(6m)$ avec m variant de 11 à 32.

Enfin la figure 4.2 donne la courbe d'évolution du temps CPU en fonction du nombre de sommets des graphes $\tilde{G}(6m)$ du tableau 4.4 ; cette courbe permet de déduire que le temps d'exécution du programme est proportionnel à $|V|^{2,03}$.

m	$ V $	$ E $		temps CPU en 1/1000 seconde	
		$G(6m)$	$\tilde{G}(6m)$	$G(6m)$	$\tilde{G}(6m)$
11	66	968	990	91	130
25	150	5000	5050	422	575
28	168	6272	6328	490	663
30	180	7200	7260	614	894
32	192	8192	8256	683	928
35	210	9800	9870	834	1136

Temps du programme COUPLAGE pour les graphes de type $G(6m)$ et $\tilde{G}(6m)$.

Tableau 4.4



Courbe de temps CPU du programme COUPLAGE pour les graphes de type G(6m).

Figure 4.2

CHAPITRE V

CONCLUSIONS

5.1 Efficacité de la procédure de marquage

Les caractéristiques intéressantes de la procédure de marquage du chapitre II sont les suivantes :

1. La représentation de l'arbre alterné nécessite une unique marque par sommet; de fait cette unique marque m a un rôle symétrique par rapport aux marques match représentant les arêtes du couplage : pour un sommet x_i pair match (x_i) donne le prédécesseur de x_i sur l'unique chaîne alternée paire le reliant à la racine de l'arbre dont il fait partie; de façon similaire, pour un sommet x_j impair $m(x_j)$ donne le prédécesseur de x_j sur l'unique chaîne alternée impaire le reliant à la racine de l'arbre dont il fait partie. Il en résulte que cette marque est calculée uniquement pour les sommets impairs : de plus sa valeur n'est jamais recalculée entre deux transferts de couplage successifs, et notamment elle reste inchangée lors de la formation d'orbites, ce qui simplifie considérablement la procédure de contraction du graphe.
2. La représentation des orbites nécessite 6 marques :
 - σ et ϵ permettent de mémoriser les relations d'inclusion des sommets et pseudosommets,
 - f_1, f_2, ext_1, ext_2 représentent la structure des orbites :
 - ext_1 et ext_2 donnent les sommets de contact des orbites avec l'arbre alterné dont ils font partie; conjointement avec les marques m et match ces marques permettent de reconstituer toute chaîne alternée de cet arbre.(résultat 2.1 du chapitre II, § 2.7).

- L'intérêt des marques f_1, f_2 réside dans le fait qu'elles permettent de rééclater tout pseudosommet externe sans avoir à déterminer au préalable ses racines, originale et actuelle, ni de modifier les marques m lors de la formation de l'orbite correspondant au pseudosommet en question (lemme 2.1 du chapitre II, § 2.7).

En fait les marques m , $match$ et ext déterminent un unique sens de parcours des orbites, mais les marques f_1 et f_2 épargnent la nécessité de savoir parcourir les orbites dans les 2 sens (c'est le cas de toutes les autres procédures de marquage pour les algorithmes d'EDMONDS), donc de réactualiser les marques à toute formation de nouvelle orbite.

3. Les transferts de couplage n'entraînent pas de modifications de couplages internes des pseudosommets; ce n'est qu'à la fin de l'algorithme qu'on procède aux rééclatements de tous les pseudosommets : les marques f , ext , $match$, m , σ , e permettent de rétablir les couplages internes compatibles avec le couplage de l'arbre dont ils font partie (chapitre II, § 2.7, § 2.8).
4. Cette procédure s'applique tout autant pour l'algorithme de couplage de cardinalité maximale (comme c'est le cas pour l'algorithme du chapitre III) que pour celui de poids maximal. Pour ce dernier cas l'algorithme en résultant est de complexité $O(n^3)$ si on utilise les méthodes originales de GABOW de modification des poids des sommets et arêtes ([7]).

5. Les pseudosommets correspondant aux orbites sont représentés explicitement par des sommets fictifs du graphe G ; si $|V| = n$ et si I dénote l'ensemble des indices des sommets originaux de G et I' celui des indices des pseudosommets, alors :

$$I = \{1, 2, \dots, n\}, I' = \{n+1, n+2, \dots, n + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}.$$

La procédure de marquage de GABOW consiste, quant à elle, à représenter les pseudosommets par des sommets particuliers de G , notamment par leur racine originale. Ceci permet bien sûr d'économiser de la place-mémoire mais complique la mise en oeuvre de l'algorithme et la démonstration de sa validité; comme d'autre part le nombre maximal de pseudosommets possibles est limité et vaut $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, la taille-mémoire supplémentaire nécessaire dans le cas de leur mémorisation explicite est peu importante par rapport à la mémoire totale utilisée.

5.2 Comparaison de l'algorithme avec les algorithmes existant.

L'algorithme présenté au chapitre III est une extension directe de l'algorithme original d'EDMONDS pour les couplages de cardinalité maximale; la différence entre ces 2 algorithmes réside dans le fait que la sélection des arêtes incorporées dans l'arbre alterné en cours de construction n'est pas arbitraire, mais obéit à des critères précis permettant d'obtenir des chaînes alternées augmentantes de longueur minimale.

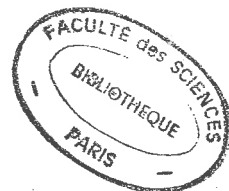
Cette caractéristique implique que la borne supérieure du nombre d'opérations est alors en $O(n^{5/2})$ si on utilise une procédure de marquage performante, contre $O(n^3)$ pour une implémentation efficace, comme celle de GABOW ([7]), de l'algorithme d'EDMONDS.

Le seul autre algorithme en $O(n^{5/2})$ résolvant le problème de couplage de cardinalité maximale, dû à S.EVEN et O.KARIV (1975, [6]), consiste aussi à déterminer des ensembles maximaux (pour l'inclusion) de plus courtes chaînes alternées augmentantes disjointes; cet algorithme utilisant les procédures de marquage de GABOW ([7]) consiste principalement en 4 sous-étapes d'un pas de l'algorithme (voir chapitre III, § 3.1), chacune de complexité d'au plus $O(n^2)$; les différences essentielles entre ces 2 algorithmes se résument dans le fait que dans l'algorithme d'EVEN et KARIV, pour tout sommet, les marques représentant les longueurs d'une des chaînes alternées paires reliant ce sommet à un des sommets insaturés, varient au cours d'une des sous-étapes de recherche de plus courtes chaînes alternées alors que dans l'algorithme présenté dans cette thèse un sommet n'est incorporé dans un des arbres alternés que si la longueur de la chaîne alternée paire le reliant à la racine de cet arbre est minimale parmi les longueurs de toutes les chaînes issues de ce sommet. En contrepartie les orbites déterminées dans l'algorithme d'EVEN et KARIV se composent uniquement des sommets du graphe original (elles ne comportent donc pas de pseudosommets), ce qui simplifie les contractions du graphe.



D'autre part l'algorithme du chapitre III peut être implémenté en utilisant n'importe quelle procédure de marquage de l'algorithme d'EDMONDS, pourvu qu'elle soit de performance comparable à celle du chapitre II : en effet il est toujours possible d'adapter le calcul des valeurs des marques de sorte qu'on respecte les critères de sélection des arêtes décrits dans le chapitre III. Cela n'est pas le cas de l'algorithme d'EVEN et KARIV.

Par ailleurs l'algorithme d'EVEN et KARIV n'a pas été programmé et il est difficile de comparer ses performances à celles du programme COUPLAGE présenté dans le chapitre IV; il est bien entendu difficile de comparer 2 programmes - les résultats dépendent non seulement des algorithmes sur lesquels ils se basent, mais aussi du langage de programmation, de la qualité de programmation et de l'ordinateur - il est néanmoins possible de dégager des tendances (par exemple les bornes réelles du nombre d'opérations sur des familles particulières de graphes ou sur des graphes aléatoires) ce qui a été fait pour l'algorithme présenté dans cette thèse (voir le chapitre IV).



BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.L. BALINSKI "Labelling to obtain a maximum matching", in R.C. Base and T.A. Dowling, Ed., Combinatorial Mathematics and Its Applications, University of North Carolina Press, Chapel Hill, North Carolina, pp. 585-602, 1967.
- [2] C. BERGE *Graphes et Hypergraphes*, DUNOD 1973.
- [3] C. BERGE "Two theorems in graph theory", Proceedings of the National Academy of Science, Vol. 43, pp. 842-844, 1957.
- [4] J. EDMONDS "Paths, trees and flowers", Canadian Journal of Mathematics, Vol. 17, pp. 449-467, 1965.
- [5] J. EDMONDS "Maximum matching and polyhedron with 0-1 vertices", Journal of Research of the National Bureau of Standards: Vol. 69B, pp. 125-130, 1965.
- [6] S. EVEN
et
O. KARIV "An $O(n^{2.5})$ algorithm for maximum matching general graphs", Proceedings Sixteenth Annual Symposium of Foundation of Computer Science, IEEE, pp. 100-112, 1975.

- [7] H. GABOW "Implementation of Algorithms for maximum matching on nonbipartite graphs", Stanford University, Ph. D. Thesis, 1974.
- [8] H. GABOW
et
E. LAWLER "An efficient implementation of Edmonds' algorithm for maximum weight matching on graphs", Note CU-CS-075-75, University of Colorado, Boulder, 1975.
- [9] H. GABOW "An efficient implementation of Edmonds' algorithm for maximum matching on graphs", JACM, Vol. 23, n°2, pp. 221-234, 1976.
- [10] M. HALL "Distinct representatives of subsets", Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 54, pp. 922-926, 1948.
- [11] J.F. HOPCROFT
et
R.M. KARP "An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs", SIAM J. COMPUT., Vol. 2, n°4, pp. 225-231, 1973.
- [12] N.W. KUHN "The Hungarian method for the assignment problem", Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 2, pp. 83-97, 1955.

- [13] M. MINOUX *Graphes et algorithmes, à paraître.*
- [14] J.P. UHRY *"Sur le problème du couplage maximal", RAIRO, V-3, pp. 13-20, 1975.*
- [15] L.J. WHITE *"A parametric study of matchings and coverings in weighted graphs", University of Michigan, Ph. D. Thesis, 1967.*
- [16] D. WITZGALL
et
C.T. ZAHN *"Modification of Edmonds' Algorithm for matching of graphs", Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 69B, pp. 91-98, 1965.*