СССР
Вычислительный центр АН Грузинской ССР
Ю. Ш. ГУРЕВИЧ

ФОРМУЛЫ С ОДНИМ $\forall$

Памяти Анатолия Ивановича Мальцева

Формулой в настоящей работе будем называть формулу чистой логики предикатов и операций. Имеется в виду логика первой ступени. Чистота обозначает отсутствие символов постоянных предикатов и операций. В частности, отсутствует предикат равенства. При каждом $n = 0, 1, \ldots$ наши формулы могут содержать произвольное (конечное) число переменных n-местных предикатов и переменных n-местных операций (в другой терминологии «функторов»).

Различие между переменными нульместными операциями и переменными индивидами довольно призрачное. Тем не менее употребление переменных нульместных операций доставит определенные удобства в изложении.

Согласно [3] Л. Левенгейм первый обнаружил существование формул, выполнимых лишь в бесконечных областях. В связи с этим дадим

Определение 1. *Класс формул Φ назовем примитивно рекурсивным по Левенгейму, если существует такая примитивно рекурсивная функция $f(\alpha)$, что простая выполнимость формулы α влечет выполнимость ее в некоторой конечной области мощности $\leqslant f(\alpha)$.*

Определение 1 требует некоторого уточнения в отношении функции $f(\alpha)$. Будем считать списки индивидных переменных, переменных предикатов и переменных операций достаточно хорошими и подразумевать некоторую гёделеву нумерацию формул. При этом $f(\alpha)$ есть $f([\alpha])$, где $[\alpha]$ — гёделев номер формулы α.

Содержание настоящей статьи составляет доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi(\exists^\infty\forall\exists^\infty)$ — *совокупность всех предваренных формул чистой логики предикатов и операций, содержащих не более одного вхождения квантора общности* $\forall$. *Класс* $\Phi(\exists^\infty\forall\exists^\infty)$ *примитивно рекурсивен по Левенгейму.*

Из теоремы 1 вытекает следующий результат В. П. Оревкова. Существует алгоритм, распознающий выводимость в чистом исчислении предикатов и операций формул вида $\forall x_1 \cdot \cdot \cdot x_m \exists y \forall z_1 \cdot \cdot \cdot z_n \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ не содержит кванторов (см. [2]). Как сообщил автору в июле 1968 г. Оревков, подробное доказательство этого результата пока не опубликовано.

В печати находится статья автора [1] о проблеме разрешения для логики предикатов и операций. Там выясняется место теоремы 1 «в общем строю».

Автор благодарен В. П. Оревкову и В. А. Лифшицу за информацию о результатах группы ленинградских логиков по проблеме разрешения.

§ 1. Первоначальные сведе́ния

Лемма 1. *Пусть* $\Phi(\forall)$ — *совокупность всех формул вида* $\forall x \mathfrak{A}$, *где* $\mathfrak{A}$ *не содержит кванторов и свободных индивидных переменных, отличных от* x. *Класс* $\Phi(\exists^\infty\forall\exists^\infty)$ *примитивно рекурсивен по Левенгейму, если таков класс* $\Phi(\forall)$.

Лемма 1 доказывается очевидным образом с помощью введения сколемовых функций. Поясним на примере. Пусть $\alpha = \forall y \exists z \mathfrak{A}(x, y, z)$ и $\mathfrak{A}$ не содержит кванторов и индивидных переменных, отличных от x, y, z. И пусть символ F_0 нульместной операции и символ F_1 одноместной операции не встречаются в $\mathfrak{A}$. Положим $\alpha^* = \forall y \mathfrak{A}(F_0, y, F_1(y))$. Очевидно, что каково бы ни было непустое множество M, α выполнима в M тогда и только тогда, когда α^* выполнима в M.

Лемма 2. *Пусть* p — *символ одноместного предиката и* $\Phi_p(\forall)$ *есть совокупность всех таких формул* $\alpha \in \Phi(\forall)$, *что каждый символ предиката из* α *есть* p. *Класс* $\Phi(\forall)$ *примитивно рекурсивен по Левенгейму, если* $\Phi_p(\forall)$ *таков.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Phi(\forall)$. Не нарушая общности, мы можем считать, что p не входит в α. Каждому символу предиката Q из α поставим в соответствие символ операции F_Q той же местности. При этом позаботимся о том, чтобы разным Q соответствовали разные F_Q и чтобы символы F_Q не встречались в α. Заменим теперь в α $Q(\ldots)$ на $p(F_Q(\ldots))$. Получим некоторую α^*.

Очевидно, что каково бы ни было множество M мощности $\geqslant 2$, α выполнима в M тогда и только тогда, когда α^* выполнима в M.

Лемма 2 доказана.

§ 2. Термы с одной индивидной переменной

Пусть Ω есть набор символов операций, содержащий хотя бы один символ нульместной операции.

Определение 2. *Посредством $T = T(\Omega, x)$ обозначим совокупность всех таких термов t, что каждая индивидная переменная из t есть x и каждый символ операции из t принадлежит множеству Ω. Совокупность термов из t, не содержащих ни одного вхождения x, обозначим T_0.*

В настоящем разделе рассмотрим термы лишь из T.

Определение 3. *Индуктивное определение высоты ht и глубины dt терма t:*

1) $hx = dx = 0$;
2) *если F есть символ нульместной операции из Ω, то $hF = 0$ и $dF = -\infty$;*
3) *при $n \geqslant 1$ $hF(t_1, \ldots, t_n) = 1 + \max ht_i$* и *$dF(t_1, \ldots, t_n) = 1 + \max dt_i$.*

Название «глубина», данное dt, можно считать сокращением для названия «глубина залегания переменной x в терме t».

Следствия
1) *$dt \geqslant 0$ равносильно тому, что $t \in T - T_0$;*
2) *$dt = 0$ равносильно $t = x$;*
3) *$dt \leqslant ht$.*

Определение 4. *Определение операции умножения термов: $t \cdot \tau$ есть результат подстановки в τ вместо вхождения переменной x вхождения терма t.*

Лемма 3. *Имеют место следующие утверждения:*
1) *Алгебра $\langle T, \cdot \rangle$ есть полугруппа;*
2) $dt \geqslant 0$ & $t \cdot \tau_1 = t \cdot \tau_2 \to \tau_1 = \tau_2$;
3) $d\tau \geqslant 0$ & $t_1 \cdot \tau = t_2 \cdot \tau \to t_1 = t_2$;
4) $h\tau_1 < ht$ & $h\tau_2 < ht$ & $t \cdot \tau_1 = t \cdot \tau_2 \to \tau_1 = \tau_2$;
5) $d(t \cdot \tau) = dt + d\tau$;
6) $h(t \cdot \tau) = \max\{h\tau,\ ht + d\tau\}$;
7) $h(t \cdot \tau) \leqslant ht + h\tau$.

Доказательство. Утверждение 1) леммы 3 очевидно, утверждение 2) легко доказывается индукцией по $d = \min\{d\tau_1, d\tau_2\}$, а 3) и 5) — индукцией по $d\tau$. Утверждение 4) леммы докажем индукцией по $d = \min\{d\tau_1, d\tau_2\}$. В случаях $d \leqslant 0$

утверждение очевидно. Пусть $d > 0$. Тогда для некоторых n, F и $\tau_{\delta i}$ имеем $\tau_\delta = F(\tau_{\delta 1}, \ldots, \tau_{\delta n})$ и $t \cdot \tau_{1i} = t \cdot \tau_{2i}$. В силу предположения индукции $\tau_{1i} = \tau_{2i}$, а потому и $\tau_1 = \tau_2$.

Утверждение 7) леммы есть непосредственное следствие 6). Утверждение 6) докажем индукцией по $d\tau$.

Оно очевидно, если $d\tau \leqslant 0$. Пусть $d\tau > 0$, $\tau = F(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ и $h(t \cdot \tau) = 1 + \max\{h(t \cdot \tau_i)\} =$ (для определенности) $1 + h(t \cdot \tau_1)$ В силу предположения индукции $h(t \cdot \tau_1) = \max\{h\tau_1,\ ht + d\tau_1\}$.

Первый случай $h(t \cdot \tau_1) = h\tau_1$. Очевидно $h\tau_1 = \max h\tau_i$, и потому $h(t \cdot \tau) = 1 + h\tau_1 = 1 + \max h\tau_i = h\tau$.

Второй случай $h(t \cdot \tau_1) = ht + d\tau_1$. Очевидно $d\tau_1 = \max d\tau_i$, и потому $h(t \cdot \tau) = 1 + ht + \max d\tau_i = ht + d\tau$.

Лемма 3 доказана.

Таким образом, подмножество $T - T_0$ образует подполугруппу с двусторонним законом сокращения; подмножество T_0 — двусторонний идеал полугруппы $\langle T, \cdot \rangle$. Каждый элемент этого идеала есть правый нуль полугруппы. Терм x — двусторонняя единица полугруппы.

Отметим также, что при $dt = -\infty$ может быть $t \cdot \tau_1 = t \cdot \tau_2$ и $\tau_1 \neq \tau_2$. Например, если $\tau_1 = x$ и $\tau_2 = t$ или $\tau_1 = F(x, t)$ и $\tau_2 = F(t, x)$.

Лемма 4. *Пусть* $t = t_1 \cdot \tau_1 = t_2 \cdot \tau_2$, $dt \geqslant 0$ *и* $d\tau_2 \leqslant d\tau_1$. *Тогда существует такое* τ, *что* $t_2 = t_1 \cdot \tau$ и $\tau_1 = \tau \cdot \tau_2$.

Лемма 4 легко доказывается индукцией по $d\tau_2$.

Определение 5. *Терм* t *назовем простым, если* $dt > 0$ *и* t *не имеет отличных от* x *и самого себя делителей.*

Лемма 5. *Каждый терм* t *из* $T - T_0$ *единственным образом разлагается в произведение простых термов. Другими словами, подполугруппа* $\langle T - T_0, \cdot \rangle$ *свободна.*

Лемма 5 легко доказывается индукцией по глубине dt терма t с помощью леммы 4.

Лемма 6. *Пусть* $t_1 \cdot \tau_1 = t_2 \cdot \tau_2$ и $0 \leqslant d\tau_2 \leqslant d\tau_1$ и $\max\{h\tau_1, h\tau_2\} < \min\{ht_1, ht_2\}$. *Тогда существует такое* τ, *что* $t_2 = t_1 \cdot \tau$ и $\tau_1 = \tau \cdot \tau_2$.

Доказательство. Отметим сначала, что в силу утверждения 6) леммы 3 $h(t_1 \cdot \tau_1) = ht_1 + d\tau_1 = ht_2 + d\tau_2$, откуда $ht_2 - ht_1 = d\tau_1 - d\tau_2 \geqslant 0$.

Далее воспользуемся индукцией по $d\tau_2$. В случае $d\tau_2 = 0$ лемма 6 очевидна.

Шаг индукции. Пусть $\tau_2 = F(\tau_{21}, \ldots, \tau_{2n})$. Тогда $\tau_1 = F(\tau_{11}, \ldots, \tau_{1n})$ и $t_1 \cdot \tau_{1i} = t_2 \cdot \tau_{2i}$. Пусть для определенности $d\tau_{21} = \max d\tau_{2i}$. Тогда и $d\tau_{11} \geqslant 0$, ибо в противном случае $h\tau_{11} = h(t_1 \cdot \tau_{11}) = h(t_2 \cdot \tau_{21}) = ht_2 + d\tau_{21} \geqslant ht_2 > h\tau_1 > h\tau_{11}$.

Кроме того, $ht_1 + d\tau_{11} = h(t_1 \cdot \tau_{11}) = h(t_2 \cdot \tau_{21}) = ht_2 + d\tau_{21}$, откуда $d\tau_{11} - d\tau_{21} = ht_2 - ht_1 \geqslant 0$. В силу предположения индукции получаем, что для некоторого τ $t_2 = t_1 \cdot \tau$ и $\tau_{11} = \tau \cdot \tau_{21}$. Таким образом,

$$t_1 \cdot \tau_1 = (t_1 \cdot \tau) \cdot \tau_2. \tag{1}$$

При этом $h\tau_1 < ht_1$ и $h(\tau \cdot \tau_2) < ht_1$, ибо $h\tau_2 < ht_1$ и $h\tau + d\tau_2 = h\tau + 1 + d\tau_{21} \leqslant 1 + h\tau_{11} \leqslant h\tau_1 < h\tau_1$. В силу утверждения 4) леммы 3 можем сократить (1) на t_1.

Лемма 6 доказана.

Для дальнейшего фиксируем некоторое положительное целое m.

Определение 6. *Если $dt \geqslant 0$ или $ht > 2m$, то посредством Rt обозначим терм максимальной глубины среди правых делителей терма t высоты $\leqslant m$. При этом посредством Lt обозначим терм, удовлетворяющий соотношению $Lt \cdot Rt = t$. Если $dt = -\infty$ и $ht \leqslant 2m$, то положим $Rt = Lt = t$.*

Лемма 7. *Определение 6 корректно, т. е. термы Rt и Lt всегда определяются однозначно.*

Доказательство. При $dt \geqslant 0$ лемма 7 есть непосредственное следствие леммы 5. При $ht \leqslant 2m$ лемма 7 тривиальна. Пусть $dt = -\infty$ и $ht > 2m$ и $t = t_1 \cdot \tau_1 = t_2 \cdot \tau_2$, где каждый τ_i удовлетворяет определению Rt. В этом случае $d\tau_1 = d\tau_2$. Кроме того, в силу леммы 6 $t_2 = t_1 \cdot \tau$ и $\tau_1 = \tau \cdot \tau_2$ для подходящего τ. Отсюда $d\tau = d\tau_1 - d\tau_2 = 0$ и потому $\tau = x$, $t_1 = t_2$, $\tau_1 = \tau_2$.

Лемма 7 доказана.

Соглашение. *Начиная с этого места буквой t с индексами и без них будем обозначать лишь элементы T_0, а буквой τ с индексами и без них — лишь термы высоты $\leqslant m$. Для обозначения произвольных термов будем использовать буквы u и v.*

Лемма 8. *Следующие утверждения равносильны:*

1) $ht \leqslant 2m$;

2) $Rt = t$;

3) $dRt = -\infty$.

Кроме того, если $ht_1 \leqslant 2m$ и $Rt_1 = Rt_2$, то и $t_1 = t_2$.

Доказательство очевидно.

Лемма 9.

1) *если $ht > m$ и $d\tau \geqslant 0$, то $h(t \cdot \tau) = ht + d\tau$;*

2) *если $h(t \cdot \tau) > 2m$, то $ht > m$ и $d\tau \geqslant 0$ и $h(t \cdot \tau) = ht + d\tau$;*

3) *если $t \cdot \tau_1 = t \cdot \tau_2$ и $ht > m$, то $\tau_1 = \tau_2$;*

4) *если $t \cdot \tau_1 = t \cdot \tau_2$ и $h(t \cdot \tau_i) > 2m$, то $\tau_1 = \tau_2$;*

5) *если $t_1 \cdot \tau_1 = t_2 \cdot \tau_2$, $d\tau_2 \leqslant d\tau_1$ и $ht_i > m$, то $\exists\tau[t_2 = t_1 \cdot \tau \;\&\; \tau_1 = \tau \cdot \tau_2]$;*

6) *если* $t_1 \cdot \tau_1 = t_2 \cdot \tau_2$, $d\tau_2 \leqslant d\tau_1$ и $h(t_i \cdot \tau_i) > 2m$, *то* $\exists\tau\,[t_2 = t_1 \cdot \tau \,\&\, \tau_1 = \tau \cdot \tau_2]$.

Лемма 9 есть очевидное следствие лемм 3 и 6.

Лемма 10. *Если* τ *делит справа* u, *то* τ *делит справа и* Ru.

Доказательство. Лемма 10 очевидна, если $du \geqslant 0$ или $hu \leqslant 2m$. В оставшемся случае лемма следует из равенства $u = Lu \cdot Ru = u_0 \cdot \tau$ и утверждения 6) леммы 9.

Лемма 10 доказана.

Лемма 11. $R(t \cdot \tau) = R(Rt \cdot \tau)$.

Доказательство. Лемма очевидна в случаях, когда $Rt = t$ или $d\tau = -\infty$. Пусть $ht > 2m$ и $d\tau \geqslant 0$. В силу предыдущей леммы $R(t \cdot \tau) = \tau_0 \cdot \tau$ для некоторого τ_0. При этом τ_0 делит справа t, ибо $t \cdot \tau = L(t \cdot \tau) \cdot \tau_0 \cdot \tau$ и на τ можно сократить. Поэтому $d\tau_0 \geqslant 0$ и τ_0 делит справа Rt, $\tau_0 \cdot \tau$ делит справа $(Rt) \cdot \tau$ и $\tau_0 \cdot \tau$ делит справа $R(Rt \cdot \tau)$. Пусть $R(Rt \cdot \cdot \tau) = \tau_1 \cdot \tau_0 \cdot \tau$.

При этом терм $\tau_1 \cdot \tau_0 \cdot \tau$ делит справа $Rt \cdot \tau$ и терм $\tau_1 \cdot \tau_0$ делит справа Rt, а потому и t. Таким образом, $\tau_1 \cdot \tau_0 \cdot \tau$ есть правый делитель $t \cdot \tau$ высоты $\leqslant m$, потому терм $\tau_1 \cdot \tau_0 \cdot \tau$ делит справа $R(t \cdot \tau) = \tau_0 \cdot \tau$. Отсюда $\tau_1 = x$, и лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Пусть* $0 \leqslant d\tau^1 \leqslant d\tau^2$ и $R(t_1 \cdot \tau^1) = R(t_2 \cdot \cdot \tau^1)$. *Тогда и* $R(t_1 \cdot \tau^2) = R(t_2 \cdot \tau^2)$.

Доказательство. Если $h(t_1 \cdot \tau^1) \leqslant 2m$ или $h(t_2 \cdot \cdot \tau^1) \leqslant 2m$, то в силу леммы 8 $t_1 \cdot \tau^1 = t_2 \cdot \tau^1$, откуда $t_1 = t_2$ и $t_1 \cdot \tau^2 = t_2 \cdot \tau^2$.

В дальнейшем считаем, что $h(t_\delta \cdot \tau^1) > 2m$. При этом и $h(t_\delta \cdot \tau^2) > 2m$.

В силу леммы 10 для подходящих τ_δ^i имеем

$$R(t_\delta \cdot \tau^i) = \tau_\delta^i \cdot \tau^i . \tag{2}$$

Полагая $L_\delta^i = L(t_\delta \cdot \tau^i)$, получаем

$$t_\delta = L_\delta^1 \cdot \tau_\delta^1 = L_\delta^2 \cdot \tau_\delta^2. \tag{3}$$

В силу (3) $\tau_\delta^2 \cdot \tau^1$ делит справа $t_\delta \cdot \tau^1$ и $h(\tau_\delta^2 \cdot \tau^1) \leqslant m$, ибо $h\tau^1 \leqslant m$ и $h\tau_\delta^2 + d\tau^1 \leqslant h\tau_\delta^2 + d\tau^2 \leqslant hR(t_2 \cdot \tau^2) \leqslant m$.

В силу леммы 10 $\tau_\delta^2 \cdot \tau^1$ делит справа и $R(t_\delta \cdot \tau^1) = \tau_\delta^1 \cdot \tau^1$, и потому для подходящего τ_δ

$$\tau_\delta^1 = \tau_\delta \cdot \tau_\delta^2. \tag{4}$$

В силу условий леммы $R(t_1 \cdot \tau^1) = \tau_1^1 \cdot \tau^1 = R(t_2 \cdot \tau^1) = \tau_2^1 \cdot \tau^1$. Отсюда

$$\tau_1^1 = \tau_2^1. \tag{5}$$

Терм τ_1^2 делит справа в силу (4) терм $\tau_1^1 = \tau_2^1$, а потому и терм $t_2 = L_2^1 \cdot \tau_2^1$, так что терм $\tau_1^2 \cdot \tau^2$ делит справа $t_2 \cdot \tau^2$ и $h(\tau_1^2 \cdot \tau^2) = \max\{h\tau^2, h\tau_1^2 + d\tau^2\} = \max\{h\tau^2, hR(t_1 \cdot \tau^2)\} \leqslant m$. Потому $\tau_1^2 \cdot \tau^2$ делит справа и $R(t_2 \cdot \tau^2) = \tau_2^2 \cdot \tau^2$, откуда следует, что τ_1^2 делит справа τ_2^2. Из соображений симметрии ясно, что и τ_2^2 делит справа τ_1^2. Так что $\tau_1^2 = \tau_2^2$, а потому и $R(t_1 \cdot \tau^2) = \tau_1^2 \cdot \tau^2 = \tau_2^2 \cdot \tau^2 = R(t_2 \cdot \tau^2)$.

Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Пусть* $0 \leqslant d\tau^1 \leqslant d\tau^2$ и $h(t_1 \cdot \tau^1) \equiv h(t_2 \cdot \tau^1)$ (mod m), *тогда и* $h(t_1 \cdot \tau^2) \equiv h(t_2 \cdot \tau^2)$ (mod m).

Доказательство. Если $h(t_\delta \cdot \tau^1) \leqslant 2m$, то $t_1 = t_2$ (см. начало доказательства леммы 12). Пусть $h(t_\delta \cdot \tau^1) > 2m$. Тогда и $h(t_\delta \cdot \tau^2) > 2m$ и $h(t_\delta \cdot \tau^i) = ht_\delta + d\tau^i$. Дальнейшее очевидно.

Лемма 13 доказана.

§ 3. Одноместный предикат и Ω-термы

Фиксируем некоторое определение одноместного предиката p на множестве T_0.

Определение 7. $t_1 \equiv t_2 (\mathrm{mod}\ n)$ *есть сокращение для* $\forall u\,[hu \leqslant n \rightarrow [p(t_1 \cdot u) \sim p(t_2 \cdot u)]]$.

Следствие. *Если* $t_1 \equiv t_2 (\mathrm{mod}\ n)$ и $hu \leqslant n$, *то* $t_1 u \equiv t_2 \cdot u (\mathrm{mod}\ n - hu)$.

В самом деле, пусть $hv \leqslant n - hu$. Тогда $hv \leqslant n$ и $hu + dv \leqslant hu + hv \leqslant hu + n - hu = n$, так что $h(u \cdot v) \leqslant n$. Потому $p(t_1 \cdot u \cdot v) \sim p(t_2 \cdot u \cdot v)$, что и требовалось доказать.

Определение 8. *Посредством* rt *обозначим при* $dRt > 0$ *высоту правого простого делителя* t. *В случае* $dRt \leqslant 0$ *положим* $rt = m$.

Замечание. *При* $dRt > 0$ *правый простой делитель* t *есть также правый простой делитель* Rt (см. лемму 10). Так что определение 8 корректно. В любом случае $rt \leqslant m$. Если $Rt_1 = Rt_2$, то $rt_1 = rt_2$.

О п р е д е л е н и е 9. *$E(t_1, t_2)$ равносильно тому, что*
1) $Rt_1 = Rt_2$;
2) $ht_1 \equiv ht_2 \pmod{m}$;
3) $Lt_1 \equiv Lt_2 \pmod{m(2 + m - rt_1)}$.

С л е д с т в и е. *E есть отношение эквивалентности на T_0. При $ht_1 \leqslant 2m$ отношение $E(t_1, t_2)$ равносильно $t_1 = t_2$.*

В каждом классе t/E зафиксируем элемент, который обозначим St. В частности, при $ht \leqslant 2m$ необходимо $St = t$. Совокупность всех классов t/E обозначим, как обычно, T_0/E.

Л е м м а 12′. *В условиях леммы 12 $R(St_1 \cdot \tau^2) = R(St_2 \cdot \tau^2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. $R(St_1 \cdot \tau^2) =$ (в силу леммы 11) $R(R(St_1) \cdot \tau^2) =$ (в силу определения 9) $R(Rt_1 \cdot \tau^2) = R(t_1 \times \tau^2) =$ (в силу леммы 12) $R(t_2 \cdot \tau^2) = R(Rt_2 \cdot \tau^2) = R(RSt_2 \times \tau^2) = R(St_2 \cdot \tau^2)$.

Лемма 12′ доказана.

Л е м м а 13.′ *В условиях леммы 13 $h(St_1 \cdot \tau^2) \equiv h(St_2 \times \tau^2) \pmod{m}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

О п р е д е л е н и е 10. *Определение операций O_τ над T_0/E:*
1) *если $d\tau = -\infty$, то $O_\tau(t/E) = \tau/E$;*
2) *$O_x(t/E) = t/E$;*
3) *если τ простой терм, то $O_\tau(t/E) = (St \cdot \tau)/E$;*
4) *если $d\tau_1 > 0$ и $d\tau_2 > 0$, то $O_{\tau_1 \cdot \tau_2}(t/E) = O_{\tau_2}(O_{\tau_1}(t/E))$.*

С л е д с т в и я. *Пусть $O_\tau(t/E) = t^*/E$.*
1) *$Rt^* = R(t \cdot \tau)$;*
2) *$ht^* \equiv h(t \cdot \tau) \pmod{m}$;*
3) *если $ht^* \leqslant 2m$,* то *$t^* = t \cdot \tau$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $d\tau \leqslant 0$ следствия 1)—3) очевидны. Пусть $d\tau > 0$.

Если терм τ прост, то $Rt^* = R(St \cdot \tau) = R(RSt \cdot \tau) = R(Rt \cdot \tau) = R(t \cdot \tau)$.

Если $\tau = \tau_1 \cdot \tau_2$ и $0 < d\tau_1 < d\tau$ и $O_{\tau_1}(t/E) = t^0/E$, то $Rt^* = R(t^0 \cdot \tau_2) = R(Rt^0 \cdot \tau_2) = R(R(t \cdot \tau_1) \cdot \tau_2) = R(t \cdot \tau_1 \cdot \tau_2)$.

Следствие 1) доказано.

Далее, если $ht^* \leqslant 2m$, то $t^* = Rt^* = R(t \cdot \tau) =$ (в силу леммы 8) $t \cdot \tau$.

Тем самым следствие 3) доказано.

Пусть снова τ простой терм. Если $ht \leqslant m$, то $St = t$ и $ht^* \equiv h(St \cdot \tau) \equiv h(t \cdot \tau) \pmod{m}$. Если $ht^* > 2m$, то $ht^* \equiv h(St \cdot \tau) \equiv hSt + d\tau \equiv ht + d\tau \equiv h(t \cdot \tau) \pmod{m}$. Пусть $\tau = \tau_1 \cdot \tau_2$ и $0 < d\tau_1 < d\tau_2$ и $O_{\tau_1}(t/E) = t^0/E$. Если $ht^0 \leqslant 2m$, то $t^0 = t \cdot \tau_1$ и $ht^* \equiv h(t^0 \cdot \tau_2) \equiv h(t \cdot \tau_1 \cdot \tau_2) \pmod{m}$.

Если же $ht^0 > 2m$, то $ht^* \equiv h(\mathrm{S}t^0 \cdot \tau_2) \equiv h\mathrm{S}t^0 + d\tau_2 \equiv ht^0 + d\tau_2 \equiv h(t \cdot \tau_1) + d\tau_2 \equiv h(t \cdot \tau_1 \cdot \tau_2) (\mathrm{mod}\ m)$.
Следствие 2) тоже доказано.

Лемма 14. *Пусть*
1) $0 < d\tau_0 < d\tau$;
2) τ *простой терм*;
3) $h\tau_0 < h\tau$;
4) $O_{\tau_0}(t^1/E) = O_{\tau_0}(t^2/E)$.
Тогда $O_\tau(t^1/E) = O_\tau(t^2/E)$.

Доказательство. В силу следствий 1) и 2) из определения 10

$$R(t^1 \cdot \tau_0) = R(t^2 \cdot \tau_0) \tag{6}$$

и

$$h(t^1 \cdot \tau_0) \equiv h(t^2 \cdot \tau_0)\ (\mathrm{mod}\ m).$$

Применяя леммы 12′ и 13′, получаем:

$$R(St^1 \cdot \tau_0) = R(St^2 \cdot \tau_0) \tag{7}$$

и

$$h(St^1 \cdot \tau_0) \equiv h(St^2 \cdot \tau_0)\ (\mathrm{mod}\ m).$$

В силу определения 10 $O_\tau(t^\delta/E) = (St^\delta \cdot \tau)/E$.
Согласно определению 9 нам осталось доказать лишь, что $L(\mathrm{S}t^1 \cdot \tau)$ и $L(St^2 \cdot \tau)$ сравнимы по модулю $m(2 + m - h\tau)$. Пусть $\tau_0 = \tau_1, \ldots, \tau_k$, где термы $\tau_1, \ldots, \tau_k$ просты.

Положим:

$$t_0^\delta = t^\delta,\ t_{i+1}^\delta = St_i^\delta \cdot \tau_{i+1},$$

$$\tau'_{i+1} = \tau_{i+1} \ldots \tau_k,\ h_{i+1} = h\tau'_{i+1}.$$

Лемма 15. $L(St_i^1 \cdot \tau'_{i+1}) \equiv L(St_i^2 \cdot \tau'_{i+1})\ (\mathrm{mod}\ m(2 + m - h_{i+1}))$.

Доказательство леммы 15 проведем индукцией по i от $k-1$ до 0. База индукции: $i = k - 1$. Очевидно, $O_{\tau_i \ldots \tau_{i+1}}(t^\delta/E) = t_{i+1}^\delta/E$ и, в частности, $O_{\tau_0}(t^\delta/E) = t_k^\delta/E$.
Поэтому из условия 4) леммы 14 вытекает $E(t_k^1, t_k^2)$, откуда $L(St_{k-1}^1 \cdot \tau'_k) \equiv Lt_k^1 \equiv Lt_k^2 \equiv L(St_{k-1}^2 \cdot \tau'_k)\ (\mathrm{mod}\ m(2 + m - h_k))$.
Предположение индукции: $0 \leqslant i < k-1$ и $L(St_{i+1}^1 \cdot \tau'_{i+2}) \equiv L(St_{i+1}^2 \cdot \tau'_{i+2})\ (\mathrm{mod}\ m(2 + m - h_{i+2}))$.

Шаг индукции. Так как $t_{i+1}^\delta = St_i^\delta \cdot \tau_{i+1}$, то $LSt_{i+1}^\delta \equiv Lt_{i+1}^\delta \equiv L(St_i^\delta \cdot \tau_{i+1})\ (\mathrm{mod}\ m(2 + m - h\tau_{i+1}))$. Домножим последнее сравнение на τ'_{i+2}. Получим, что $L\left(St^{\delta}_{i+1}\cdot\tau'_{i+2}\right)$ и $L\left(St^{\delta}_{i}\cdot\tau'_{i+1}\right)$ сравнимы по модулю $m(2+m-h\tau_{i+1})-h_{i+2}$ и тем более по модулю $m(2+m-h_{i+1})$.

В силу же предположения индукции $L(St^1_{i+1}\cdot\tau'_{i+2})$ и $L(St^2_{i+1}\cdot\tau'_{i+2})$ сравнимы по модулю $m(2+m-h_{i+2})$ и тем более по модулю $m(2+m-h_{i+1})$. Таким образом, $L\left(St^1_i\cdot\tau'_{i+1}\right)$ и $L(St^2_i\cdot\tau'_{i+1})$ сравнимы по модулю $m(2+m-h_{i+1})$.

Лемма 15 доказана. Продолжим доказательство леммы 14.

Если $h(St^1\cdot\tau_0)\leqslant 2m$, то $St^1\cdot\tau_0=R(St^1\cdot\tau_0)=$ (в силу (6)) $R(St^2\cdot\tau_0)=$ (в силу леммы 8) $St^2\cdot\tau_0$. Поэтому согласно утверждению 3) леммы 3 $St^1=St^2$, и лемма 14 доказана. Аналогично рассуждаем в случае $h(St^2\cdot\tau_0)\leqslant 2m$. В дальнейшем считаем, что $h(St^{\delta}\cdot\tau_0)>2m$ при $\delta=1,2$. При этом и $h(St^{\delta}\times\times\tau)>2m$.

В силу леммы 10

$$R(St^{\delta}\cdot\tau_0)=\tau^*\cdot\tau_0 \tag{8}$$

и $R(St^{\delta}\cdot\tau)=\tau_*\cdot\tau_0$ для некоторых τ^* и τ_*, не зависящих в силу (6) и (7) от δ. Так как $h\tau_0<h\tau\leqslant h(\tau_*\cdot\tau_0)$ и $h\tau_*+d\tau_0<<h\tau_*+d\tau\leqslant h(\tau_*\cdot\tau)$, то $h(\tau_*\cdot\tau_0)<h(\tau_*\cdot\tau)\leqslant m$. Кроме того, $\tau_*\cdot\tau_0$ делит справа $St^{\delta}\cdot\tau_0$. Поэтому $\tau_*\cdot\tau_0$ делит справа $R(St^{\delta}\cdot\tau_0)=\tau^*\cdot\tau_0$ и $\tau^*=\tau'\cdot\tau_*$ для некоторого τ'.

В силу (8) $St^{\delta}\cdot\tau_0=L(St^{\delta}\cdot\tau_0)\cdot\tau^*\cdot\tau_0$, откуда $St^{\delta}\cdot\tau==L(St^{\delta}\cdot\tau_0)\cdot\tau^*\cdot\tau=L(St^{\delta}\cdot\tau_0)\cdot\tau'\cdot\tau_*\cdot\tau$
и

$$L(St^{\delta}\cdot\tau)=L(St^{\delta}\cdot\tau_0)\cdot\tau'. \tag{9}$$

При $i=0$ лемма 15 утверждает, что $L(St^1\cdot\tau_0)\equiv L(St^2\cdot\cdot\tau_0)\,(\mathrm{mod}\ m(2+m-h\tau_0))$. Из этого сравнения и из (9) вытекает, что $L(St^1\cdot\tau)$ и $L(St^2\cdot\tau)$ сравнимы по модулю $m(2+m-h\tau_0)--h\tau'$ (см. следствие из определения 7), и тем более по модулю $m(2+m-h\tau)$.

Лемма 14 доказана.

Лемма 16. *Пусть $\tau=F(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ и при каждом $i=1,\ldots,n$ $O_{\tau_i}(t_1/E)=O_{\tau_i}(t_2/E)$. Тогда $O_{\tau}(t_1/E)=O_{\tau}(t_2/E)$.*

Доказательство. Если $d\tau<0$, лемма 16 очевидна. *Случай* $d\tau=0$ невозможен. Пусть $d\tau>0$. Если $\tau==\tau^0\cdot\tau'$ для некоторого $\tau^0\neq x$, то для некоторых τ'_i имеем: $\tau_i=\tau^0\cdot\tau'_i$, $\tau'=F(\tau'_1,\ldots,\tau'_n)$, $O_{\tau'_i}(O_{\tau^0}(t_1/E))=O_{\tau'_i}(O_{\tau^0}(t_2/E))$.

Отсюда по предположению индукции получаем $O_\tau(t_1/E) = O_{\tau'}(O_{\tau^0}(t_1/E)) = O_{\tau'}(O_{\tau^0}(t_2/E)) = O_\tau(t_2/E)$. Пусть, наконец, терм τ прост. В этом случае лемма 16 есть непосредственное следствие леммы 14.

Лемма 16 доказана.

Определение 11. *Определение операций на T_0/E:*

1) *пусть F есть символ нульместной операции из Ω. На T_0/E значением операции F объявляем элемент F/E;*

2) *если F есть символ одноместной операции из Ω, то положим $F(t/E) = O_{F(x)}(t/E) = F(St)/E$;*

3) *пусть $n > 1$ и F есть символ n-местной операции из Ω. Если $t_i/E = O_{\tau_i}(t/E)$ и терм $\tau = F(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ прост или не содержит вхождений x, то положим $F(t_1/E, \ldots, t_n/E) = O_\tau(t/E)$. В противном случае, когда не существует подходящих t и τ, положим $F(t_1/E, \ldots, t_n/E) = t_1/E$.*

Конечно, пункт 2) из определения 11 есть частный случай пункта 3).

Лемма 17. *Определение 11 корректно.*

Доказательство. Пусть $n > 1$, в силу определения 11 $F(t_1/E, \ldots, t_n/E) = O_{\tau_1}(t^1/E)$ и в силу того же определения $F(t_1/E, \ldots, t_n/E) = O_{\tau_2}(t^2/E)$. Пусть $\tau_\delta = F(\tau_{\delta_1}, \ldots, \tau_{\delta n})$ и для определенности $d\tau_2 \leqslant d\tau_1$.

В силу наших предположений

$$t_i/E = O_{\tau_{1i}}(t^1/E) = O_{\tau_{2i}}(t^2/E),$$

откуда согласно следствиям 1) и 2) из определения 10

$$Rt_i = R(t^1 \cdot \tau_{1i}) = R(t^2 \cdot \tau_{2i}) \tag{10}$$

и

$$ht_i \equiv h(t^1 \cdot \tau_{1i}) \equiv h(t^2 \cdot \tau_{2i}) \pmod m. \tag{11}$$

Если $h(t^\delta \cdot \tau_\delta) \leqslant 2m$, то $t^1 \cdot \tau_{1i} = R(t^1 \cdot \tau_{1i}) = R(t^2 \cdot \tau_{2i})$ (в силу леммы 8) $= t^2 \cdot \tau_{2i}$.

Отсюда $t^1 \cdot \tau_1 = t^2 \cdot \tau_2$ и $O_{\tau_1}(t^1/E) = (t^1 \cdot \tau_1)/E = (t^2 \cdot \tau_2)/E = O_{\tau_2} \cdot (t^2/E)$. Пусть поэтому

$$h(t^\delta \cdot \tau_\delta) > 2m. \tag{12}$$

Тогда согласно (11) $ht^1 + d\tau_{1i} \equiv ht^2 + d\tau_{2i} \pmod m$ и потому разность $d = d\tau_{1i} - d\tau_{2i}$ не зависит от i и равна $d\tau_1 - d\tau_2$.

Если $dR(t^\delta \cdot \tau_{\delta i}) \geqslant 0$, то из (10) следует, что для некоторого τ^i

$$\tau_{1i} = \tau^i \cdot \tau_{2i} \tag{13}$$

и при этом для некоторого t^{2i}

$$t^2 = t^{2i} \cdot \tau^i. \tag{14}$$

Если же $dR(t^\delta \cdot \tau_{\delta i}) < 0$, то в силу (10) и леммы 8 $t^1 \cdot \tau_{1i} = t^2 \cdot \tau_{2i}$. Ввиду (12) и утверждения 6) леммы 9 при этом для подходящего τ^i имеет место (13) и $t^2 = t^1 \cdot \tau^i$, т. е. t^1 играет роль t^{2i} из (14). Таким образом, в любом случае имеет место (13) и (14). При этом $d\tau^i = d\tau_{1i} - d\tau_{2i} = d$.

Мы хотим доказать, что τ^i не зависит от i. Из соображений симметрии достаточно доказать, что $\tau^1 = \tau^2$. На основании (14)

$$t^2 = t^{21} \cdot \tau^1 = t^{22} \cdot \tau^2. \tag{15}$$

В силу (12) $ht^2 + d\tau_2 > 2m > 2d\tau_1$, отсюда

$$ht^2 + 2d\tau_2 > 2d\tau_1,$$

т. е.

$$ht^2 > 2d\tau_1 - 2d\tau_2 = 2d.$$

Поэтому $ht^{2i} = ht^2 - d > d$ и по лемме 6 τ^1 делит τ^2 или τ^2 делит τ^1. В любом случае получаем $\tau^1 = \tau^2$. Таким образом, τ^i не зависит от i и поэтому из (13) следует $\tau_1 = \tau^1 \cdot \tau_2$. Так как терм τ_1 прост, то $\tau^1 = x$ и $\tau_1 = \tau_2$. При этом лемма 17 становится непосредственным следствием леммы 16.

Лемма 17 доказана.

В силу определения 11 множество T_0/E становится Ω-алгеброй. Каждому $u \in T$ соответствует в T_0/E (как и в любой другой Ω-алгебре) операция, которую мы будем обозначать звездочкой. Очевидны следующие утверждения:

1) $t/E * x = t/E$;
2) если $du = -\infty$, то $t/E * u = u/E$;
3) $t/E * F(u_1, \ldots, u_n) = F(t/E * u_1, \ldots, t/E * u_n)$;
4) $t/E * (u_1 \cdot u_2) = (t/E * u_1) * u_2$.

Лемма 18. $t/E * \tau = O_\tau(t/E)$.

Доказательство индукцией по $d\tau$. Если $d\tau \leqslant 0$, то лемма 18 очевидна. Пусть $d\tau > 0$. Первый случай: $\tau = \tau_1 \cdot \tau_2$ и $0 < d\tau_1 < d\tau$. Тогда $t/E * \tau = (t/E * \tau_1) * \tau_2 = O_{\tau_2}(O_{\tau_1}(t/E)) = O_\tau(t/E)$. Второй случай: τ — простой терм. Тогда $t/E * \tau = F(t/E * \tau_1, \ldots, t/E * \tau_n) = F(O_{\tau_1}(t/E), \ldots, O_{\tau_n}(t/E)) = O_\tau(t/E)$ в силу определения 11.

Лемма 18 доказана.

Лемма 19. $St \equiv t \pmod m$.

Доказательство очевидным образом вытекает из определения 9.

Определение 12. *Определение предиката p в T_0/E:$p(t/E)$ равносильно $p(t)$.*

Лемма 20. $p(t \cdot \tau) \sim p(t/E * \tau)$.

Доказательство очевидно в случае $d\tau \leqslant 0$. Пусть $d\tau > 0$ и $\tau = \tau_1 \ldots \tau_k$, где каждый из термов τ_i прост. Положим $t_0 = t$, $t_{i+1} = St_i \cdot \tau_{i+1}$, $\tau'_{i+1} = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_{i+1}$, $h_{i+1} = h\tau'_{i+1}$.

Лемма 21. *При* $1 \leqslant i \leqslant k$ $t_i \equiv t \cdot \tau'_i$ (mod $m - h_i$).

Доказательство индукцией по i. База индукции: $i = 1$. Так как $St \equiv t(\mathrm{mod}\ m)$, то $t_1 \equiv t \cdot \tau_1 (\mathrm{mod}\ m - h_1)$. Предположение индукции: $1 \leqslant i \leqslant k$ и $t_i \equiv t \cdot \tau'_i (\mathrm{mod}\ m - h_i)$. Шаг индукции. В силу предположения индукции $St_i \equiv t \cdot \tau'_i (\mathrm{mod}\ m - h_i)$. Отсюда $t_{i+1} \equiv t \cdot \tau'_{i+1} (\mathrm{mod}\ m - h_{i+1})$.

Лемма 21 доказана.

При $i = k$ лемма 21 дает $t_k \equiv t \cdot \tau$ (mod $m - h\tau$), откуда $p(t_k) \sim p(t \cdot \tau)$. Имеем $t_i/E * \tau_{i+1} =$ (в силу леммы 18) $O_{\tau_{i+1}}(t_i/E) =$ (в силу определения 10) t_{i+1}/E.
Отсюда $t/E*\tau = t_k/E$ и $p(t/E*\tau) \sim p(t_k) \sim p(t \cdot \tau)$.

Лемма 20 доказана.

Будем считать множество Ω конечным. Тогда имеет место

Лемма 22. *Множество T_0/E конечно, и мощность его есть примитивно рекурсивная функция от Ω и m.*

Доказательство очевидно.

§ 4. Завершение доказательства теоремы 1

Лемма 23. *Пусть $\alpha = \forall x \mathfrak{A}$ есть выполнимая формула из $\Phi_p(\forall)$, Ω есть совокупность символов операций из α, m есть максимум высоты термов из α, и все содержание § 2 относится именно к этим Ω и m. Тогда в множестве T_0 можно так определить предикат p, что система $\mathfrak{T} = \langle T_0, \Omega, p \rangle$ окажется моделью для α (т. е. α будет принимать значение истины в $\mathfrak{T}$).*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \Omega, p \rangle$ есть модель для α и χ — естественный гомоморфизм $\langle T_0, \Omega \rangle$ в $\langle M, \Omega \rangle$. Для каждого $t \in T_0$ положим, что $p(t)$ равносильно $p(\chi(t))$. Легко видеть, что указанное определение p искомое.

Лемма 23 доказана.

Лемма 24. *Пусть система $\mathfrak{T} = \langle T_0, \Omega, p \rangle$ есть модель для α. Тогда и система $\mathfrak{T}/E = \langle T_0/E, \Omega, p \rangle$ (см. определения 9, 11 и 12) есть модель для α.*

Доказательство. $\mathfrak{A}(x)$ есть пропозициональная функция формул вида $p(\tau)$. Поэтому лемма 24 вытекает из леммы 20.

Лемма 24 доказана.

Лемма 25. *Класс $\Phi_p(\forall)$ примитивно рекурсивен по Левенгейму.*

Лемма 25 вытекает из лемм 23, 24 и 22.

Наконец, из лемм 1, 2 и 25 вытекает теорема 1.

Литература

1. Ю. Ш. Гуревич. Проблема разрешения для логики предикатов и операций. — Алгебра и логика, 1969, 8, № 3, 284—308.
2. В. П. Оревков. II симпозиум по кибернетике (тезисы). Тбилиси, 1965, стр. 176.
3. Черч А. Введение в математическую логику. ИЛ, 1960.

Поступило 22 ноября 1968 г.