АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

2

МОСКВА · 1972

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XIII, № 2 Март — Апрель 1972

ОТДЕЛ ЗАМЕТОК

УДК 518.5

Ю. Ш ГУРЕВИЧ, И. О. КОРЯКОВ

ЗАМЕЧАНИЯ К РАБОТЕ Р. БЕРГЕРА О ПРОБЛЕМЕ ДОМИНО

Излагается усиление результата Р. Бергера, полученного им в докторской диссертации (1).

Понятие домино ввел Хао Ван (2) в связи с исследованием проблемы разрешения для формул исчисления предикатов с префиксом $\forall\exists\forall$. (См. также (3), где с достаточной полнотой представлены результаты о домино, предшествовавшие работе Р. Бергера. Популярное изложение этого вопроса можно найти в (4).)

Рассмотрим квадраты (*типы* домино) единичного размера с окрашенными сторонами. Предположим, что краски берутся из некоторого фиксированного счетного множества $\mathfrak{A}$. *Набором* домино (над $\mathfrak{A}$) называется конечное множество типов. Будем также предполагать, что для каждого типа имеется бесконечно много его экземпляров — *костей.*

Говорят, что набор *D-выполнимый*, если костями (может быть, не всех) типов из D можно покрыть бесконечную плоскость так, чтобы выполнялись условия:

а) кости нельзя ни поворачивать, ни переворачивать (зеркально отражать);

б) состыкованные стороны костей должны быть одинаково окрашены.

Решение набора есть любое конкретное покрытие плоскости костями типов этого набора. (Первоначально задача рассматривалась для квадранта, а не для плоскости. Но это различие несущественно, так как легко доказать (см., например, (5)), что задачи покрытия плоскости и квадранта равносильны.)

Говорят, что набор D покрывает *тор* (имеет периодическое решение), если из костей типов из D можно, соблюдая условия а), б), составить прямоугольный блок, противоположные стороны которого имеют идентичные последовательности символов, так что этот блок можно рассматривать как единую (но прямоугольную) кость, способную покрыть плоскость. (Тор получится «настоящим», если в указанном блоке склеить противоположные стороны.)

Пусть $\mathfrak{D}$ — класс всех наборов домино над фиксированным счетным множеством символов (красок) $\mathfrak{A}$.

В (2) поставлен вопрос о существовании алгоритма для распознавания выполнимых наборов в классе $\mathfrak{D}$. В (1) доказано, что проблема распознаваемости таких наборов (проблема домино) неразрешима.

Пусть $\nu: \mathfrak{D} \to N = \{0, 1, 2, \dots\}$ — эффективная нумерация наборов класса $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{J}$ — класс наборов из $\mathfrak{D}$, имеющих решения, но только непериодические; $\mathfrak{F}$ — класс наборов, покрывающих тор; $\mathfrak{R}$ — класс наборов, не имеющих решения. Основным результатом данного замечания является следующая

Теорема. *Множества $\nu(\mathfrak{J})$, $\nu(\mathfrak{F})$, $\nu(\mathfrak{R})$ попарно эффективно неотделимы.*

Сформулируем точные эквиваленты введенных понятий.

Конечное множество D упорядоченных четверок натуральных чисел называется набором домино. Элементы из D называются типами домино.

Пусть Q — множество всех целых чисел; $\varkappa_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ — координатные функции, определенные на Q^4. Говорят, что набор D выполнимый (покрывает плоскость), если существует отображение φ: $Q^2 \to D$, удовлетворяющее условиям

$$\varkappa_1\varphi(x, y+1) = \varkappa_3\varphi(x, y), \qquad \varkappa_2\varphi(x+1, y) = \varkappa_4\varphi(x, y). \tag{1}$$

Каждое такое φ называется решением набора D.

Скажем, что набор D покрывает тор, если существует периодическое решение набора D, т. е. отображение φ, удовлетворяющее (1), для которого найдутся такие натуральные числа $p_1, p_2 > 0$, что

$$\forall xy [\varphi(x + p_1, y) = \varphi(x, y) = \varphi(x, y + p_2)]. \tag{2}$$

В том случае, если p_1, p_2 — наименьшие положительные числа, удовлетворяющие (2), решение φ называется (p_1, p_2)-периодическим.

Для доказательства неразрешимости проблемы домино Р. Бергер использует машины Тьюринга. Мы примем следующий вариант таких машин, более подходящий для нашей цели.

Эти машины должны иметь два ленточных символа S_0 и S_1, а множество внутренних состояний каждой машины будет конечным подмножеством некоторого фиксированного (эффективно порожденного) счетного множества $\mathfrak{L}$ (машины над $\mathfrak{L}$), имеющего три выделенных символа: q_1 (начальное состояние), q_{-1} и q_0 (стоп-состояния).

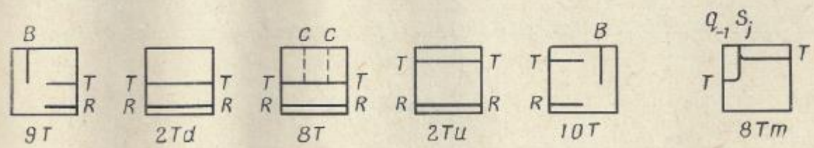
Считаем, что машины всегда начинают работу в состоянии q_1, обозревая единственную ячейку с символом S_0, причем по мере надобности могут «приклеивать» к ленте (только) справа новые ячейки, содержащие S_0. Полагаем также, что, находясь в самой левой ячейке, никакая машина не получает команды двигаться влево. Остановиться машина может только в состояниях q_{-1} и q_0, причем в программе нет команд, начинающихся с этих символов.

Рассмотрим класс всех машин над $\mathfrak{L}$ (класс $\mathfrak{M}$). Пусть μ: $\mathfrak{M} \to N$ — эффективная нумерация машин класса $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{J}'$ — класс вечно работающих машин из $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{F}'$ — класс машин, останавливающихся в состоянии q_{-1}; $\mathfrak{R}'$ — класс машин, останавливающихся в состоянии q_0. Основанием для доказательства теоремы служит известная (см. ([3])).

Лемма 1. *Множества $\mu(\mathfrak{Z}')$, $\mu(\mathfrak{F}')$, $\mu(\mathfrak{R}')$ попарно эффективно неотделимы.*

Дополняя конструкцию Р. Бергера, укажем алгоритм, сопоставляющий каждой машине Z из $\mathfrak{M}$ набор D_Z из $\mathfrak{D}$ следующим образом: если $Z \in \mathfrak{Z}'$, то $D_Z \in \mathfrak{Z}$; если $Z \in \mathfrak{F}'$, то $D_Z \in \mathfrak{F}$; если $Z \in \mathfrak{R}'$, то $D_Z \in \mathfrak{R}$. Из существования такого алгоритма и леммы 1 непосредственно следует теорема.

Доказательство теоремы. К набору скелетных прототипов ([1] табл. 2) добавим прототипы $2Td$, $2Tu$, $8T$, $9T$, $10T$, а к набору форм ма-



Чертеж 1

шинных прототипов ([1] табл. 6), добавим форму 8 Tm (см. чертеж 1), где T-сигнал — новый, общий для этих и только этих прототипов. T-сигналы идут на различных уровнях: в скелетных прототипах $2Tu$ и $10T$ — выше, чем в $2Td$ $8T$ и $9T$. Соответствующие каналы, которые вводятся специально, суть общие с аналогичными каналами машинных прототипов формы $8Tm$.

Определение скелетного набора K ([1], табл. 4) в пунктах (c) и (d) нужно дополнить следующими ограничениями:

1) скелетный прототип $8T$ образует произведения с выбирающими прототипами $10p$ — $14p$ и только с ними;

2) скелетный прототип $9T$ образует произведение с выбирающим прототипом $V13$ и только с ним;

3) скелетный прототип $10T$ образует произведение с выбирающим прототипом $H12$ и только с ним.

Соответствующие ограничения для прототипов $2Td$ и $2Tu$ получаются автоматически.

Определение набора D_z ([1] табл. 7) в п. (b) дополняется ограничением: машинные прототипы формы $8Tm$ образуют произведения только с K-прототипами, имеющими скелетный прототип 2 и выбирающие прототипы $10p$ — $14p$.

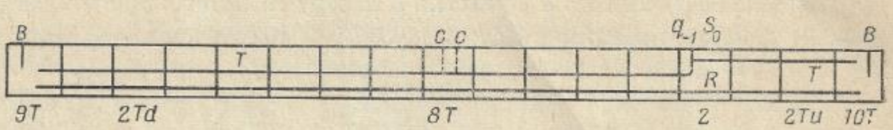
Лемма 2. 1) *Если машина Z работает вечно, набор D_z имеет решения и только непериодические.*

2) *Если Z попадает в состояние q_{-1}, D_z имеет периодическое решение.*

3) *Если Z попадает в состояние q_0, D_z не имеет решений.*

Доказательство. 1) Пусть Z никогда не останавливается. Тогда ни для какого $n \geqslant 0$ ее n-конфигурация не содержит символа q_0. Поэтому, как в ([1]), сигналы, выходящие из нижней части любого растущего n-регистра, входят в верхнюю часть его приемника $(n+1)$-регистра. Конфигурация машины не содержит также символа q_{-1}, откуда (аналогично доказательству Р. Бергера, ([1]), раздел 4.2.3) следует, что в плоскости решения набора D_z не может появиться кость, имеющая машинный прототип $8Tm$. Так как сигналы этого и только этого прототипа могут связать T-сигналы, идущие на различных уровнях в скелетных (регистровых) прототипах $8T$ с одной стороны и $2Tu$ (или $10T$) с другой, ни в одном регистре не появляется T-сигнал.

Для T-сигнала, который встречается в скелетных прототипах обязательно вместе с R-сигналом, остается (в силу леммы 3—4 и добавления 1 ([1]))



Чертеж 2

единственная возможность появиться в (некоторых) решениях набора D_z, существующих в силу теоремы 3—3 из ([1]): в виде бесконечного сигнала вместе с бесконечным R-сигналом в ряду, составленном из костей, имеющих скелетный прототип только $2Td$ или только $2Tu$. Но такая ситуация, допустимая и в ([1]), очевидно, ничего не портит в доказательстве теоремы 3—6 работы ([1]), из которой следует необходимость непериодического решения набора D_z.

2). Пусть в момент n машина Z остановилась в состоянии q_{-1}. q_{-1} S_j-сигнал, входящий из нижней части растущего $(n+1)$-регистра либо заканчивается в кости с машинным прототипом 8 в умирающем $(n+2)$-регистре, имеющем символ выбора 12, 21 или 22, либо сменяется на горизонтальные T-сигналы в кости с машинным прототипом формы $8Tm$ в $(n+2)$-регистре с символом выбора 11. Последний регистр должен строиться из скелетных прототипов с T-сигналами, т. е. снова должен быть умирающим. Чертеж 2 показывает такой 4-регистр, появляющийся в любом решении набора D_z, где Z имеет программу (опуская «неработающие» команды): $q_1S_0Rq_2$, $q_2S_0Rq_{-1}$. (Под регистром стоят номера соответствующих скелетных прототипов; выбирающие сигналы и базисные номера опущены.)

Таким образом, у всех $(n+2)$-регистров не будет преемников. Нетрудно видеть, что если все, кроме T, скелетные и выбирающие сигналы принадлежат некоторой итеративной конструкции (([1]), раздел 3.2.5), то это решение — $(2^{n+5}, 2^{n+4})$-периодическое.

3) Пусть Z останавливается в состоянии q_0 в момент n. В нижней части растущих $(n+1)$-регистров должен появиться q_0 S_j-сигнал, который будет доставлен передающими прототипами к верхней части $(n+2)$-регистров. Но среди машинных прототипов нет прототипа, могущего образовать произведения с K-прототипами растущего регистра и имеющего на верхней стороне символ q_0S_j. Лемма доказана.

Как уже отмечалось ранее, из лемм 1 и 2 следует теорема.

Авторы благодарят Р. Бергера, любезно приславшего экземпляр своей диссертации.

Поступила в редакцию
1 февраля 1971 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Berger R., The undecidability of the domino problem, Mem. Amer. Math. Soc., 66 (1966), 1—72.
[2] Hao Wang. Proving theorems by pattern Recognition, II, Bell Syst. Tech. J., 40 (1961), 1—41.
[3] Hao Wang. Dominoes and the AEA case of the decision problem, Sympos. Math. Theory Automata, New York, 1962; Polytechnic Press of Institute of the Brooklin, Brooklin, N. Y., 1963.
[4] Хао Ван, Игры, логика и вычислительные машины, Кибернет. сб., новая сер., вып. 5 (1967), 195—207.