МВ и ССО РСФСР

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

Зое с поздравлениями
8 марта
Ю

На правах рукописи

Ю. Ш. ГУРЕВИЧ

ПРОБЛЕМА РАЗРЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

(004 — Алгебра и теория чисел)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Свердловск
1968

НС 15036 6/II-1968 г. Объем 1 п. л. Зак. 57 Тир. 150
Свердловск, улица 8 Марта, 62. Типолаборатория УрГУ.

МВ и ССО РСФСР

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А.М.Горького

На правах рукописи

Ю.Ш.Гуревич

ПРОБЛЕМА РАЗРЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

(004 - Алгебра и теория чисел)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

СВЕРДЛОВСК - 1968

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии Уральского государственного университета.

Официальные оппоненты :

1. Доктор ф.-м. наук Ершов Ю.Л.
2. Доктор ф.-м. наук профессор Плоткин Б.И.
3. Доктор ф.-м. наук профессор Трахтенброт Б.А.

Ведущее научно-исследовательское учреждение - Математический институт им. В.А.Стеклова.

Автореферат разослан "15" февр 1968 г.

Защита диссертации состоится "20" марта 1968 г. на заседании Совета Уральского государственного университета им. А.М.Горького по присуждению ученых степеней по математическим наукам

(Свердловск, пр. Ленина, 51, ауд. 88).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке.

Ученый секретарь
Университета

Проблема разрешения для логистической системы есть проблема существования и нахождения алгоритма, с помощью которого относительно любой формулы исчисления можно решить, является она теоремой или нет.

Первая глава диссертации посвящена проблеме разрешения для чистого исчисления предикатов первой ступени, которое мы обычно будем называть просто исчислением предикатов, и некоторым приложениям полученных результатов к прикладным исчислениям. Чистое исчисление предикатов не содержит ни постоянных предикатов ни постоянных или переменных операций. Будем рассматривать также исчисление предикатов с равенством, оно отличается от чистого исчисления тем, что содержит постоянный предикат равенства.

Проблема разрешения для чистого исчисления предикатов равносильна проблеме эффективного распознавания выполнимых формул среди всех формул исчисления (проблеме эффективного распознавания выполнимости). Рассматривают также проблему эффективного распознавания конечной выполнимости, т.е. выполнимости в некоторой конечной области.

Пусть Φ есть такой класс формул исчисления предикатов, что по внешнему виду формулы $\varphi \in \Phi$ просто подсчитывается такое натуральное N, что если φ выполнима, то уже в области мощности $\leqslant N$. Выполнимость совпадает с конечной выполнимостью в классе Φ и распознается очевидным и простым образом. Примерами классов с таким простым алгоритмом распознавания выполнимости могут служить следующие классы формул исчисления предикатов с равенством (подробности можно найти в монографии В. Аккермана "Разрешимые случаи проблемы разрешения", см. (Аккерман, 1954)):

1. Класс формул, не содержащих предикатных переменных с числом мест $\geqslant 2$ ((Левенгейм, 1915)).

2. Класс предваренных формул с приставками вида $\exists^m \forall^n$ (очевидно).

3. Класс предваренных формул с приставками вида $\exists^m \forall \exists^n$ ((Аккерман, 1928)).

4. Класс предваренных формул с приставками вида $\exists^m \forall^2 \exists^n$ ((Гедель, 1933), (Кальмар, 1933), (Шютте, 1934а и 1934б)).

Пусть Π - множество слов в алфавите $\{\forall, \exists\}$, т.е. множество "приставок", а σ пусть - набор предикатных переменных. Обозначим через $\Phi(\Pi, \sigma)$ (соотв., через $\Phi^*(\Pi, \sigma)$) совокупность всех предваренных и замкнутых (т.е. без свободных переменных индивидных) формул исчисления предикатов (соотв., исчисления предикатов с равенством), имеющих приставки лишь из Π *, а предикатные переменные лишь из σ.

Большая часть работ по проблеме разрешения для исчисления предикатов посвящена введенным классам. Из приведенных выше примеров вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть

$$\Pi_0^1 = \{\exists^m \forall^n : m, n = 0, 1, \dots\},$$

$$\Pi_0^2 = \{\exists^m \forall^i \exists^n : i = 0, 1, 2, \; m, n = 0, 1, \dots\}.$$

Выполнимость и конечная выполнимость эффективно распознаваемы в классе $\Phi^*(\Pi, \sigma)$, если пара (Π, σ) удовлетворяет хотя бы одному из следующих трех требований:

а. В σ нет предикатных переменных с числом мест ≥ 2.

б. $\Pi \subseteq \Pi_0^1 \cup \Pi_0^2$.

в. В σ лишь конечное число предикатных переменных с числом мест ≥ 1 и разность $\Pi - (\Pi_0^1 \cup \Pi_0^2)$ тоже конечна.

В 1936 году А.Черч доказывает невозможность эффективного распознавания теорем (следовательно, и выполнимых формул) среди всех формул исчисления предикатов. В 1950 году Б.А.Трахтенброт доказывает невозможность эффективного распознавания общезначимости в конечных областях (следовательно, и конечной выполнимости) для исчисления предикатов. Названные результаты повысили интерес к решению проблемы разрешения для исчисления предикатов в частных случаях и к сведению проблемы разрешения к ее частным случаям. Напомним следующее определение. Класс Φ формул исчисления предикатов с равенством или без называется классом сведения по выполнимости (соотв., по конечной выполнимости), если существует алгоритм $\mathfrak{A}$, который перерабатывает произвольную формулу α исчисления предикатов в такую $\beta \in \Phi$,что выполнимость α равносильна выполнимости β (соотв.,конечная выполнимость α равносильна конечной выполнимости β).Если же существует такой сводящий алгоритм α ,что и выполнимость α равносильна выполнимости β и конечная выполнимость α равносильна конечной выполнимости β ,будем называть Φ классом консервативного сведения.

Будем говорить,что множество приставок Π_2 мажорирует множество приставок Π_1 ,если каждое слово из Π_1 получается вычеркиванием букв из некоторого слова из Π_2 .Будем говорить,что набор предикатных переменных σ_2 мажорирует набор предикатных переменных σ_1 ,если существует 1-1-отображение совокупности предикатных переменных из σ_1 с числом мест $\neq 0$ в σ_2 ,которое не уменьшает числа мест предикатных переменных. Будем говорить,что пара (Π_2, σ_2) мажорирует пару (Π_1, σ_1) ,если Π_2 мажорирует Π_1 и σ_2 мажорирует σ_1 .Нетрудно видеть,что введенные отношения являются рефлексивными,транзитивными и удовлетворяют условию обрыва убывающих цепочек. Кроме того,в каждом множестве множеств Π , наборов σ или пар (Π, σ) имеется лишь конечное число минимальных элементов. Без труда проверяется следующая

<u>Лемма 1</u>. Каждая пара (Π, σ) ,не удовлетворяющая ни одному из требований предложения 1, мажорирует одну из следующих девяти пар (где F - двуместная предикатная переменная, а f_i - одноместная) :

К1 : $\Pi = \{\forall\exists\forall\}$, $\sigma = \{F, f_0, f_1, \dots\}$,

К2 : $\Pi = \{\forall^3\exists\}$, $\sigma = \{F, f_0, f_1, \dots\}$,

К3 : $\Pi = \{\exists^n\forall^3\exists : n = 0, 1, \dots\}$, $\sigma = \{F\}$,

К4 : $\Pi = \{\forall^n\exists : n = 0, 1, \dots\}$, $\sigma = \{F\}$,

К5 : $\Pi = \{\forall\exists\forall^n : n = 0, 1, \dots\}$, $\sigma = \{F\}$,

К6 : $\Pi = \{\forall^3\exists^n : n = 0, 1, \dots\}$, $\sigma = \{F\}$, К7 : $\Pi = \{\exists^n \forall \exists \forall : n = 0,1,\dots\}$, $\sigma = \{F\}$,

К8 : $\Pi = \{\forall \exists^n \forall : n = 0,1,\dots\}$, $\sigma = \{F\}$,

К9 : $\Pi = \{\forall \exists \forall \exists^n : n = 0,1,\dots\}$, $\sigma = \{F\}$.

Итоги большого периода в изучении классов сведения для выполнимости подведены в монографии (Шураньи, 1959): "Классы сведения проблемы разрешения для исчисления предикатов первой ступени". Согласно этой монографии классы Ф(К2), Ф(К3), Ф(К4), Ф(К6) и Ф(К8) являются классами сведения по выполнимости. Отметим, что класс Ф(К1) легко сводится (консервативно) к Ф(К7) и не слишком сложно к Ф(К5). Если говорить о сведении по выполнимости, то ко времени монографии Шураньи не "добиты" лишь, фактически, классы Ф(К1) и Ф(К9). В 1962 году появляется работа Бюхи, принесшая новый метод и новый результат. Продолжая исследования Бюхи, группа американских математиков (Хао Ван, Кар, Мур, см. работы в списке литературы) доказывает, что Ф(К1) есть класс консервативного сведения. Кар консервативно сводит затем Ф(К1) к Ф(К2). Дентон консервативно сводит Ф(К1) к Ф(К4) и Ф(К5). Ф(К1) очевидным образом сводится консервативно к Ф(К7), а Ф(К2) к Ф(К3). Доказательство того, что Ф(К6) есть класс консервативного сведения дано независимо Костырко в (1965) и Гуревичем в (1965). В работе (1964) Костырко консервативно сводит Ф(К7) к Ф(К8). Одним из основных результатов диссертации является

<u>Теорема 1.2.</u> Класс Ф(К9) есть класс консервативного сведения.

Сведение к Ф(К9) позволило автору впервые сформулировать следующее предложение, см. (Гуревич, 1966б).

<u>Предложение 2.</u> Если пара (Π, σ) не удовлетворяет ни одному из требований предложения 1, то класс $\Phi(\Pi, \sigma)$ есть класс консервативного сведения.

Доказательство теоремы 1.2 использует в начальной своей стадии идею Бюхи из работы (Бюхи, 1962). Эта идея использовалась и в работах, посвященных классу Ф(К1).

Вспомогательной для теоремы 1.2 является следующая

Теорема 1.1. Пусть m^* - число состояний универсальной машины Тьюринга с двумя ленточными символами, а $\overline{\log_2 m^*}$ - наименьшее целое число, мажорирующее $\log_2 m^*$, и $\tau = \overline{\log_2 m^*} + 8$. Совокупность всевозможных замкнутых формул вида

$$\forall x \exists u \forall y [\alpha(x,u,y) . \neg Fxx . \neg Fxu . \neg Fux] \; \&$$
$$\& \; \exists z_0 \dots z_n \, \beta(z_0, \dots, z_n) \; ,$$

где α и β - бескванторные формулы исчисления предикатов с одной двуместной предикатной переменной и τ одноместными, есть класс консервативного сведения.

Теорема 1.1 послужила отправной точкой для рассмотрения классов $\Phi(\Pi_1 \& \dots \& \Pi_n, \sigma)$ и $\Phi^*(\Pi_1 \& \dots \& \Pi_n, \sigma)$.

Через $\Phi(\Pi_1 \& \dots \& \Pi_n, \sigma)$ (соотв., через $\Phi^*(\Pi_1 \& \dots \& \Pi_n, \sigma)$) мы обозначаем совокупность всех формул вида $\varphi_1 \& \dots \& \varphi_n$, где $\varphi_i \in \Phi(\Pi_i, \sigma)$ (соотв., $\varphi_i \in \Phi^*(\Pi_i, \sigma)$).
Можно было бы также рассматривать классы

$$\Phi = \{ \mathfrak{A}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \varphi_i \in \Phi(\Pi_i, \sigma) \} ,$$

где $\mathfrak{A}$ - формула исчисления высказываний, но для наших целей это обобщение мало существенное. §3 главы 1 посвящен специально доказательству аналогов предложений 1 и 2 для классов $\Phi(\Pi_1 \& \dots \& \Pi_n, \sigma)$ и $\Phi^*(\Pi_1 \& \dots \& \Pi_n, \sigma)$.
Мы позволим себе не приводить здесь точных формулировок. Отметим лишь, что нам пришлось ограничить рассмотрение случаем, когда σ содержит $\geqslant \tau + 3$ не нульместных предикатных переменных, где τ имеет тот же смысл, что и в теореме 1.1, и что роль минимальных классов консервативного сведения при этом играют следующие классы :

1. Φ(К1).

2. $\Phi(\Pi_1 \& \Pi_2, \sigma)$, где $\Pi_1 = \{\forall\exists\}$, $\Pi_2 = \{\forall^3\}$,

$\sigma = \{ F, f_0, f_1, \dots \}$.

3. $\Phi(\Pi_1 \& \Pi_2, \sigma)$, где $\Pi_1 = \{\forall\exists\}$,

$\Pi_2 = \{\forall^n : n = 1, 2, \ldots\}$, $\sigma = \{F, f_1, \ldots, f_{r+2}\}$.

4. $\Phi(\Pi_1 \& \Pi_2, \sigma)$, где $\Pi_1 = \{\forall\exists\forall\}$,

$\Pi_2 = \{\exists^n : n = 1, 2, \ldots\}$, $\sigma = \{F, f_1, \ldots, f_{r+2}\}$.

5. $\Phi(\Pi_1 \& \Pi_2 \& \Pi_3, \sigma)$, где $\Pi_1 = \{\forall\exists\}$, $\Pi_2 = \{\forall^3\}$,

$\Pi_3 = \{\exists^n : n = 1, 2, \ldots\}$, $\sigma = \{F, f_1, \ldots, f_{r+2}\}$.

Консервативные сведения класса Ф(К1) ко второму и третьему из перечисленных классов принадлежат, соответственно, Кару и Дентону. Их можно найти в работе (Гуревич, 1966в). Из теоремы 1.1 следует, что четвертый из этих классов есть класс консервативного сведения. Наконец, теорема 1.3 из §3 главы 1 утверждает, что пятый из этих классов есть класс консервативного сведения.

§4 главы 1 посвящен приложениям полученных результатов к некоторым прикладным исчислениям. Прикладное исчисление предикатов первой ступени не содержит переменных предикатов или операций. Совокупность всех формул такого исчисления будем называть, как это часто делается, языком. Точнее было бы говорить язык первой ступени, но других языков мы рассматривать вообще не будем.

Пусть L - язык. Множество $T \subseteq L$ называется теорией (элементарной теорией) в языке L , если оно замкнуто относительно правил вывода. Пусть σ - совокупность всех постоянных предикатов и операций языка L . Алгебраическая модель сигнатуры σ называется моделью языка L . Если в модели M языка L тождественно истинны все формулы теории $T \subseteq L$, то M называют моделью теории T . В книге (Тарский, Мостовский и Робинсон, 1953) предикат равенства объявляется логической константой (наряду с индивидными переменными, связками, кванторами и скобками). А остальные постоянные

постоянные предикаты и операции называются нелогическими константами. В §4 мы рассматриваем языки без логического символа равенства.

Естественно сказать, что класс Φ формул языка L есть класс консервативного сведения относительно теории $T \subseteq L$, если существует алгоритм, который произвольную формулу α исчисления предикатов перерабатывает в такую $\beta \in \Phi$, что α выполнима тогда и только тогда, когда β выполнима на некоторой модели теории T, и α конечно выполнима тогда и только тогда, когда β выполнима на некоторой конечной модели теории T. Для краткости формулировок обозначим через $L(\tau)$ совокупность всех замкнутых и предваренных формул языка L с приставками вида $\forall^i \exists^n$, где $i \leq \tau$, $n = 0, 1, \ldots$. Наши приложения основываются на одном замечании, касающемся принципа сведения, из обзора (Ершов, Лавров, Тайманов и Тайцлин, 1965). Специальный способ сведения, мы называем его экзистенциальной интерпретацией, иллюстрируется в диссертации леммой 4.1.

Пусть язык L_0 содержит одну-единственную нелогическую константу - постоянный двуместный предикат. Модели языка L_0 называют графами. Теорема 1.4 утверждает, что $L_0(3)$ есть класс консервативного сведения относительно теории графов. Теорема 1.4 есть, конечно, переформулировка того факта, что класс Ф(К6) есть класс консервативного сведения. Для краткости мы выводим теорему 1.4 из теоремы 1.2. Теоремы 1.5 и 1.6 утверждают, что класс $L_0(3)$ есть класс консервативного сведения относительно теории симметричных графов и теории иррефлексивных графов. Теорема 1.7 утверждает, что $L_0(6)$ есть класс консервативного сведения относительно теории симметричных и рефлексивных графов. Пусть L_G есть язык с единственной нелогической константой - трехместным предикатом. Лемма 4.3 утверждает, что $L_G(18)$ есть класс консервативного сведения относительно теории метабелевых (=нильпотентных ступени 2) групп с тождеством $x^{p^2} = 1$, где p - нечетное простое число, или с тождеством $x^8 = 1$. В работе (Гуревич, 1965) доказывается, что лемма 4.3 останется верной, если в ее формулировке 18 заменить на 12 и что лемма 4.3 останется верной, если в ее формулировке заменить 18, p^2, 8 на 6, p^3, 16, соответственно.

Приведенные в §4 главы 1 результаты усиливают результаты об отрицательном решении проблемы разрешения для соответствующих теорий из обзора (Ершов, Лавров, Тайманов, Тайцлин, 1965). А неразрешимость (=нерекурсивность) теории нильпотентных 2-групп является новым результатом (неразрешимость теории нильпотентных p-групп, где p - нечетное простое число, была установлена ранее А.И.Мальцевым, см. цитированный обзор). В работе (Гуревич, 1965) указывается еще ряд распространенных алгебраических теорий, относительно которых имеют место аналогичные приведенным в §4 результаты.

Вторая глава диссертации посвящена решеточно упорядоченным абелевым группам. Первые три параграфа второй главы посвящены линейно упорядоченным абелевым группам (л.у.а. группам). Пожалуй, это наиболее интересная часть диссертации.

Напомним еще несколько определений теории моделей. Теория модели M языка L есть множество $Th(M)$ всех формул из L, тождественно истинных в M. Две модели M_1 и M_2 языка L называются элементарно эквивалентными, если $Th(M_1) = Th(M_2)$. Теория $Th(K)$ класса K моделей языка L есть пересечение теорий моделей из K. Если теория $Th(K)$ разрешима (=рекурсивна), то и сам класс K называют разрешимым. Проблема классификации моделей класса K по элементарным свойствам состоит в нахождении подходящего критерия элементарной эквивалентности моделей класса K.

В работе (1954) В.Шмелева классифицировала абелевые группы по элементарным свойствам и доказала (фактически) примитивную рекурсивность теории абелевых групп. Все это - методом элиминации кванторов. В работе (1961) А.Робинсон и Е.Закон классифицировали по элементарным свойствам архимедовые л.у.а. группы. Они действовали методом модельной полноты. Тем же методом в работе (1963) М.И.Каргаполов значительно усилил результаты Робинсона и Закона. Он классифицировал класс л.у.а. групп, содержащий все л.у.а. группы конечного ранга, но все же подвергнутый жестким ограничениям. В работе (1964) автор классифицировал класс всех л.у.а. групп по элементарным свойствам (с точностью до л.у. множеств) и свел теорию л.у.а. групп к теории л.у. множеств. При этом использовался метод Фрайсе-Эренфойхта-Тайманова (А.Д.Тайманов называет его методом перекидывания) в форме, найденной Эренфойхтом и использующей специальные игры. Доказательство основной теоремы из работы (Гуревич, 1964) - длинное и плохо поддающееся разбиению на независимые этапы. А.И.Мальцев неоднократно говорил о необходимости найти новое, более читаемое доказательство разрешимости теории л.у.а. групп Новое (и при том примитивно-рекурсивное) сведение теории л.у. а. групп к теории л.у. множеств было построено диссертантом методом элиминации кванторов в последнее время. Переходим к его изложению.

Определения :

1. Пусть s - положительное целое число. s-фундаментом $F(s,x)$ элемента x л.у.а. группы G назовем объединение всех таких выпуклых подгрупп л.у.а. группы G (пустое множество также считаем выпуклой подгруппой), которые не содержат элементов, сравнимых с x по модулю s. Вместо $F(p^s, x)$ будем писать $F(p, s, x)$.

В следующих определениях x есть переменный элемент л.у.а. группы G, X - переменная выпуклая подгруппа, p - простое число, s - положительное целое число.

2. $F(s,X) \sim \exists x\,(X = F(s,x))$.

Если $G \vdash F(s,X)$, то выпуклую подгруппу X назовем s-фундаментальной.

3. $A(s,x) = \sup\{X : F(s,X) \,.\, x \bar{\in} X\}$,

$B(s,x) = \inf\{X : F(s,X) \,.\, x \in X\}$,

если в G нет s-фундаментальных подгрупп, содержащих x, то $B(s,x) = G$. Разность $B(s,x) - A(s,x)$ назовем s-скачком.

4. $A(s,X) \sim \exists x\,(X = A(s,x))$.

5. Фактор-группу подгруппы $\{x : F(p,s,x) \subseteq X\}$ по подгруппе $\{x : F(p,s,x) \subset X\}$ обозначим $\Gamma(p,s,X)$.

$\Gamma(p,s,X)$ удовлетворяет тождеству $p^s \cdot x = 0$ и разлагается в прямую сумму примарных циклических групп. Посредством $\rho(p,s,k,X)$ обозначим число циклических слагаемых порядка p^k в некотором разложении $\Gamma(p,s,X)$ в прямую сумму примарных циклических слагаемых.

6. $G \vdash E(X)$ означает, по определению, что фактор-группа G/X дискретна. Это если $X \neq \phi$. А $G \vdash E(\phi)$ означает дискретность самой G.

7. $G \vdash \mathcal{D}(p)$ означает существование в G не пустой и не нулевой p-делимой выпуклой подгруппы.

Л.у.а. группы мы рассматриваем как модели описанных ниже языков L_1, L_2, L_3.

Описание L_1. Переменные элементы языка L_1 обозначаются буквами x, y, z (с индексами и без) и интерпретируются как переменные элементы л.у.а. группы. Нелогические константы языка L_1: символ 0 выделенного элемента, символ $-$ одноместной операции, символ $+$ двуместной операции и символ $<$ двуместного предиката.

Описание L_2. Индивидные переменные языка L_2 обозначаются буквами X, Y, Z, и интерпретируются как переменные выпуклые подгруппы. Нелогические константы языка L_2: символ ϕ выделенного элемента, символы $\mathcal{D}(p)$ нульместных предикатов, символы $F(p, \ )$, $A(p, \ )$, E, $\rho(p,s,k, \ ) > \tau$ одноместных предикатов и символ $\subset$ двуместного предиката. Здесь p пробегает простые числа, τ - натуральные, s - положительные целые и при данном s k принимает значения $1, \dots, s$. Каждый квантор каждой формулы языка L_2 должен быть ограничен одним из предикатов $F(p, \ )$ или $A(p, \ )$.

Язык L_3 мы опишем здесь более вольно. Он содержит языки L_1 и L_2 и содержит еще символы $F(p,s,x)$ и $A(p,x)$ одноместных операций. Каждый квантор, связывающий переменную выпуклую подгруппу в формулах языка L_3, должен быть ограничен одним из предикатов $F(p, \ )$ или $A(p, \ )$.

§1 главы 2 посвящен изучению алгебраических свойств л.у.а. групп. В нем исследуется роль s-фундаментальных подгрупп и

s-скачков, а также вводятся и исследуются π-фундаментальные подгруппы и π-скачки, где π - некоторое множество простых чисел. §2 главы 2 посвящен доказательству основной теоремы 2.1 Мы приведем здесь одно следствие :

Следствие из основной теоремы 2.1. Существует примитивно-рекурсивная процедура, которая перерабатывает произвольную замкнутую формулу языка L_3 в эквивалентную ей на каждой л.у.а. группе замкнутую формулу языка L_2 .

Существует также и при том несравненно более простая процедура, которая перерабатывает произвольную замкнутую формулу языка L_3 в эквивалентную ей на каждой л.у.а. группе замкнутую формулу языка L_1. Таким образом, две л.у.а. группы G_1 и G_2 элементарно эквивалентны относительно языка L_1 (а также и языка L_3) тогда и только тогда, когда они элементарно эквивалентны относительно языка L_2. Это и есть новый признак элементарной эквивалентности л.у.а. групп.

Делимые л.у.а. группы состоят с точки зрения языка L_2 из одного элемента ϕ . Архимедовые и не делимые группы состоят с точки зрения языка L_2 из двух элементов, ими являются ϕ и $\{0\}$. В классе, рассмотренном М.И.Каргаполовым, элементарная эквивалентность л.у.а. групп как моделей языка L_1 равносильна изоморфизму их как моделей языка L_2. Если X - выпуклая подгруппа л.у.а. группы G , то л.у.а. группы G и лексикографическая сумма $X+\cdot G/X$ изоморфны как модели языка L_2 , а потому и элементарно эквивалентны как модели языков L_1 и L_3 . Заметим, что тем не менее л.у.а. группа может не быть элементарно эквивалентной лексикографической сумме архимедовых групп. Из приведенного признака элементарной эквивалентности вытекает и целый ряд других следствий. Мы надеемся остановиться на них где-нибудь уже в другом месте.

В процессе построения сводящей процедуры из теоремы 2.1 мы используем шмелевский алгоритм, но лишь в отношении абелевых групп с тождеством $p^s x = 0$. Конечно, для этого случая можно придумать независимый и более простой алгоритм.

В процессе изложения параграфа 3 главы по совокупности нелогических констант замкнутой формулы ψ языка L_2 просто (и, конечно, примитивно-рекурсивно) выписывается такая формула χ с теми же нелогическими константами, что ψ тогда и только тогда есть теорема теории л.у.а. групп, когда $\chi \to \psi$ есть теорема теории л.у. множеств с дополнительными одноместными предикатами. Если присовокупить сюда еще простое сведение теории л.у. множеств с дополнительными одноместными предикатами к теории л.у. множеств из работы (Гуревич, 1964), то мы получим примитивно-рекурсивное сведение теории л.у.а. групп к теории л.у. множеств. Впрочем, в работе (Лейхли и Леонард, 1966) доказана разрешимость теории л.у. множеств с дополнительными одноместными предикатами. Таким образом, и теория л.у.а. групп разрешима. Используя теорему 2.1 можно получить также разрешимость многих подклассов класса всех л.у.а. групп. Интересно, что разрешима также теория л.у.а. групп в языке, содержащем язык L_3 и содержащем предикат $\in$. Но об этом тоже уже в другом месте.

С другой стороны, не составляет большого труда убедиться в том, что теория частично упорядоченных абелевых групп неразрешима. В связи с этим (видимо, и без этой связи) интересен вопрос о проблеме разрешения для теории решеточно упорядоченных абелевых групп (р.у.а. групп). Вопрос этот, в частности, был сформулирован академиком А.И.Мальцевым на конгрессе математиков в Москве. Вообще, р.у.а. группами интересовались многие математики. Целое направление функционального анализа занимается полуупорядоченными (т.е. решеточно упорядоченными) пространствами. Р.у.а. группам посвящены монографии (Жаффар, 1960), (Рибенбойм, 1964) и специальные разделы книг (Фукс, 1965) и (Бурбаки, 1965). Но работ, посвященных специально элементарной теории р.у.а. групп совсем мало. В 1966 году Кокорин и Хисамиев классифицировали по элементарным свойствам (с точностью до л.у.а. групп) класс всех р.у.а. групп с конечным числом нитей. Напомним, что $x \perp y$ есть сокращение для $|x| \wedge |y| = 0$ и что множество

$$\hat{x} = \{ y : \forall z (x \perp z \sim y \perp z) \}$$

называется нитью. Отношение

$$\hat{x} \leq \hat{y} \sim \forall z (y \perp z \to x \perp z)$$

превращает множество нитей в решетку. Решетка нитей существенно характеризует р.у.а. группу. В работе (1966) Хисамиев классифицировал р.у.а. группы по универсальным свойствам и доказал разрешимость универсальной теории р.у.а. групп. Элементарная же теория р.у.а. групп оказалась неразрешимой. Более того, пусть L есть класс всех р.у.а. групп Γ, удовлетворяющих следующим требованиям:

1. Γ допускаем доопределение умножения на действительные числа, превращающее ее в К-линеал (см., например, (Вулих, 1961)), т.е. Γ становится при этом векторным пространством над полем действительных чисел и для всяких $x, y \in \Gamma$ и всякого действительного $\xi > 0$ имеет место: $x < y \to \xi x < \xi y$.
В частности, Γ - делимая группа.
2. Γ - архимедова, т.е. если $x, y \in \Gamma$ и для всякого положительного целого n имеет место $nx \leq y$, то $x = 0$.
3. Решетка $\hat{\Gamma}$ нитей р.у.а. группы Γ - атомная.
4. Решетка $\hat{\Gamma}$ - булева алгебра.

Содержание §4 главы 2 составляет доказательство следующей теоремы

<u>Теорема 2.3</u>. Класс L наследственно неразрешим.

Так что всякий класс р.у.а. групп, содержащий L, неразрешим. Из доказательства теоремы 2.3 видно следующее. В требовании 3 атомность можно заменить на безатомность. Требование 4 можно заменить требованием, чтобы $\hat{\Gamma}$ была решеткой с относительными дополнениями и без единицы. И, конечно, требование 1 можно заменить требованием делимости и счетности. Требование 1 можно заменить также тем требованием, чтоба Γ была счетной и свободной. Во всех вариациях получаются наследственно неразрешимые классы. Класс L не является минимальным наследственно неразрешимым классом в точном смысле слова минимальный, но обычные в теории р.у.а. групп и нетривиальные ограничения превращают L в разрешимый класс.

Какие же естественные классы р.у.а. групп разрешимы? Из разрешимости теории л.у.а. групп следует в соответствии с общими теоремами теории моделей (см. обзор (Ершов, Лавров, Тайманов, Тайцлин, 1965)) разрешимость классов полных и дискретных прямых сумм л.у.а. групп. В §5 главы 2 доказывается разрешимост класса всех р.у.а. групп с конечным числом нитей и многих его естественных подклассов. Используется при этом разрешимость классов л.у.а. групп, классификация Кокорина и Хисамиева р.у.а. групп с конечным числом нитей, теорема Фефермана и Воота (см. цитированный обзор четырех авторов) и работа (Донер, 1965).

§6 главы 2 посвящен К-группам, т.е. таким р.у.а. группам, которые допускают доопределение умножения на действительные числа, превращающее их в К-пространство (см. (Вулих, 1961)). Напомним еще, что р.у. группа называется полной, если каждое ее ограниченное подмножество обладает точной верхней и точной нижней границей. На стр. 138 книги (1965) Фукс пишет, что полная р.у. группа есть прямая сумма К-группы и подпрямой суммы л.у. циклических групп. Этому замечанию Фукса мы посвятили подпараграф 1 из §6. Мы позволили себе привести доказательство того, что полная р.у. группа есть прямая сумма К-группы и некоторой полной р.у. группы без делимых элементов. Затем мы строим пример такой полной р.у. группы без делимых элементов, которая не есть подпрямая сумма архимедовых л.у. групп. При этом мы весьма существенно используем результаты книги (Вулих, 1961).

Остальная часть §6 главы 2 посвящена классификации К-групп по элементарным свойствам и проблеме разрешения для теории К-групп. Шириной К-группы Г мы называем максимальное число строго положительных и попарно ортогональных элементов Г, если это число существует и конечно, и символ ∞ в противоположном случае. Будем говорить, что р.у.а. групп Γ атомна (соотв., безатомно, с единицей, без единицы), если решетка $\hat{\Gamma}$ такова. Опишем нашу классификацию К-групп. Каждая К-группа Γ разлагается в прямую сумму атомной и безатомной К-групп Γ_a и Γ_δ. Две К-группы Γ и Γ' элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда Γ_a и Γ'_a элементарно эквивалентны и Γ_δ и Γ'_δ элементарно эквивалентны. Все безатомные К-группы с единицей (соотв., без единицы) элементарно эквивалентны, такие К-группы есть. Все атомные К-группы без единицы элементарно эквивалентны, такие К-группы тоже есть. Наконец, две атомные К-группы с единицей элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же ширину; при том существуют атомные К-группы с единицей любой ширины.

Теорема 2.9. Пусть М - класс К-групп и Х - совокупность таких натуральных х, что х есть ширина некоторой К-группы из М. Класс М разрешим тогда и только тогда, когда множество Х рекурсивно. В частности, класс всех К-групп разрешим.

Последний, седьмой, параграф главы 2 посвящен К-линеалам. К-линеал X есть двуосновная модель $\langle R, X_1 \rangle$, где R - поле действительных чисел, а X_1 - некоторая р.у.а. группа и одновременно векторное пространство над R и для всяких $x, y \in X_1$ и всякого положительгого $\xi \in R$ имеет место $x<y \to \xi x < \xi y$. Шириной $\omega(X)$ К-линеала X будем называть ширину р.у.а. группы X_1.

Теорема 2.10. Пусть М - такой класс К-линеалов, что

$$\sup \{ \omega(X) : X \in M \} = \infty .$$

Тогда класс М неразрешим.

Обозначим через $J(X)$ л.у. множество скачков выпуклых подгрупп л.у.а. группы X_1 К-линеала X ширины 1. Оказывается, два К-линеала X и Y ширины 1 тогда и только тогда элементарно эквивалентны, когда л.у. множества $J(X)$ и $J(Y)$ элементарно эквивалентны. Пуст. M - класс К-линеалов ширины 1, а J - класс л.у. множеств $J(X)$, где X пробегает M. Класс M тогда и только тогда разрешим, когда класс J разрешим. Элементарная классификация К-линеалов конечной ширины аналогична элементарной классификации р.у.а. групп с конечным числом нитей. Пусть n - положительное целое число, класс всех К-линеалов ширины $\leqslant n$ разрешим. Класс М К-пространств (т.е. К-линеалов с одной р.у.а. группой) разрешим тогда и только тогда, когда ширина К-пространств из М ограничена некоторым конечным числом.

Теоремы нумеруются в диссертации единым образом внутри главы, а леммы - внутри параграфа. Теорема 2.1 есть первая теорема второй главы, а лемма 2.1 есть первая лемма из §2 главы 1 или 2.

Результаты диссертации опубликованы в работах : (1964), (1965), (1966а), (1966б), (1966в), (1967а), (1967б).

Об этих результатах автор неоднократно докладывал на организованном акад.А.И.Мальцевым семинаре "Алгебра и логика", на алгебраическом семинаре при Уральском государственном университете (рук. - проф. П.Г.Конторович) и на заседаниях Уральского Математического общества. Результаты докладывались также на нескольких всесоюзных коллоквиумах по общей алгебре, на международном конгрессе математиков в Москве и на семинаре по общей алгебре при МГУ (рук. - проф А.Г.Курош).

ЛИТЕРАТУРА

Аккерман (Akkerman Wilhelm)

1928. Math.Ann.,IOO,638-649.

1954. Solvable cases of decision problem, Amsterdam.

Бурбаки Н.

1965. Алгебра (многочлены и поля,упорядоченные группы), М.

Бюхи (Buchi J.R.)

1962. Turing Machines and the Entscheidungsproblem, Math. Ann.,I48,201-2I3.

Вулих Б.З.

1961. Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М.

Гедель (Godel K.)

1933. Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, Monatshefte fur Math. und Physik,40,433-443.

Гуревич Ю.Ш.

1964. Элементарные свойства упорядоченных абелевых групп, Алгебра и логика,3,№ 1,5-39 (переведено на англ. язык).

1965. Экзистенциальная интерпретация, Алгебра и логика, 4,№ 4,71-85.

1966а. К проблеме разрешения для чистого узкого исчисления предикатов, ДАН,166,№ 5,1032-1034.

1966б. Проблема разрешения для узкого исчисления предикатов, ДАН,168,№ 3,510-511.

1966в. Об эффективном распознавании выполнимости формул УИП, Алгебра и логика,5,№ 2,25-55.

Гуревич Ю.Ш.
1966г.Проблема равенства слов для некоторых классов полугрупп,Алгебра и логика,5,№ 5.25-35.
1967а.Наследственная неразрешимость одного класса структурно упорядоченных абелевых групп,Алгебра и логика, 6,№ 1,45-62.
1967б.К элементарной теории структурно упорядоченных абелевых групп и K-линеалов,ДАН,175,№ 6,1213-1215.
Гуревич Ю.Ш. и Кокорин А.И.
1963.Универсальная эквивалентность упорядоченных абелевых групп,Алгебра и логика,2,№ 1,37-39.
Дентон (Denton J.S.)
1963. NAMS,IO,I24.
Донер (Doner J.E.)
1965. NAMS,I2,463.
Ершов Ю.Л.,Лавров И.А.,Тайманов А.Д.,Тайцлин М.А.
1965.Элементарные теории,УМН,20,№ 4,37-108.
Жаффар (Jaffard P.)
1960. Les systemes d'ideaux, Paris.
Закон (Zakon E.)
1961. Trans. AMS, 99,N I, 2I-40.
Кальмар. (Kalmar L.)
1933. Math. Ann.,I08,466-484.
Кар (Kahr A.S.)
1963. Proc. Sympos. Math. Theory Automata (New York,I962),57-70.

Кар,Мур,Хао Ван. (Kahr A.S.,Moor E.T.,Hao Wang)
1962. Entscheidungsproblem reduced to the ∀∃∀ case, Proc.Math.Acad.Sci.,USA,48,n 5,367-377.
Кар,Хао Ван. (Kahr A.S.,Hao Wang)
1962. NAMS, 9, I30.

Каргаполов М.И.
1963.Классификация упорядоченных абелевых групп по элементарным свойствам,Алгебра и логика,2,№ 2,31-46.
Кокорин А.И.,Хисамиев Н.Г.
1966.Элементарная классификация структурно упорядоченных абелевых групп с конечным числом нитей,Алгебра и логика,5,№ 1,41-50.

Кострко В.Ф.

1964. Класс сведения $\forall\exists^n\forall$, Алгебра и логика, 3, № -6, 45-55.

1965. К проблеме разрешимости в узком исчислении предикатов, Киев, кандидатская диссертация.

1966. О классе сведения $\forall\exists\forall$. Кибернетика, № 1, 17-22.

Левенгейм (Lowenheim L.)

1915. Math. Ann., 76, 447-470.

Лехли, Леонард. (Lachli H., Leonard J.)

1966. Fund. Math., 59. I, IOI-II6.

Мальцев А.И.

1960. Об одном соответствии между кольцами и группами, Мат.сб., 50(92), 257-266.

1961а. Неразрешимость элементарной теории конечных групп, ДАН, 138, № 4, 771-774.

1961б. Эффективная неотделимость множества тождествнно истинных и множества конечно опровержимых формул некоторых элементарных теорий, ДАН, 139, № 4, 802-805.

1965. Алгоритмы и рекурсивные функции, М.

Рибенбойм (Ribenboim P.)

1964. Theorie des groupes ordonnes, Bachia Blanca.

Робинсон и Закон (Robinson A., Zakon E.)

1960. Elementary properties of abelian groups, Trans. AMS., 99, N 6, 222-236.

Тайманов А.Д.

1962. Характеристики аксиоматизируемых классо моделей, Алгебра и логика, 1, № 4, 5-31.

Тарский, Мостовский, Робинсон (Tarski A., Mostowski A., Robinson R.)

1963. Undecidable Theories, Amsterdam.

Трахтенброт Б.А.

1950. Невозможность алгоритма для проблемы разрешимос-и на конечныз классах, ДАН, 70, 569-572.

Феферман, Воот (Feferman S., Vaught R.)

1959. Fund. Math., 47, 57-IO3.

Фукс Л.

1965. Частично упорядоченные алгебраические системы, М.

Хао Ван. (Hao Wang)

1963. Proc. Sympos. Math. Theory Automata (New York, I962), 23-55.

Черч А.
1960. Введение в математическую логику, М.
Шмелева (Szmielew W.)
1954. Fund. Math., 41, 203—271.
Шураньи (Schuranyi J.)
1959. Reduktionsthrorie des Entscheidungsproblem, Budapest.
Шютте (Schutte K.)
1934а. Math. Ann., 109, 572—603.
1934б. Math. Ann., 110, 161—194.
Эренфойхт (Ehrenfeucht A.)
1959, NAMS, 6, 268—269.
1960. Fund. Math., 49. 1, 128—141.