ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1967

т. 175, № 6

Доклады Академии наук СССР
1967. Том 175, № 6

УДК 519.9 *МАТЕМАТИКА*

Ю. Ш. ГУРЕВИЧ

К ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ СТРУКТУРНО УПОРЯДОЧЕННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП И K-ЛИНЕАЛОВ

(Представлено академиком А. И. Мальцевым 9 XI 1966)

Согласно ([1]), класс всех линейно упорядоченных абелевых групп (л.у.а. групп) разрешим, т. е. элементарная теория этого класса разрешима. С другой стороны, нетрудно показать, что класс всех частично упорядоченных абелевых групп неразрешим. В связи с этим (видимо, и без этой связи) интересен вопрос о разрешимости класса всех структурно упорядоченных абелевых групп (с.у.а. групп). В частности, вопрос этот был сформулирован А. И. Мальцевым на конгрессе математиков в Москве в 1966 г. (см. также ([2])). В ([3]) доказана разрешимость универсальной теории класса всех с.у.а. групп и приведена классификация с.у.а. групп по универсальным свойствам.

Обозначим через L класс всех с.у.а. групп G, удовлетворяющих следующим требованиям:

1. Можно доопределить умножение элементов G на действительные числа, превращающее G в K-линеал, т. е. в такое векторное пространство, в котором умножение будет согласовано со структурными операциями, см. ([4]). В частности, G — делимая группа.
2. G — архимедова (см. ([5])).
3. Структура $\hat{G}$ нитей (см. ([5])) с.у.а. группы G — атомная.
4. $\hat{G}$ — булева алгебра.

Теорема 1. *Всякий класс с.у.а. групп, содержащий L, неразрешим.*

В определении L атомность можно заменить на безатомность. Требование 4 можно заменить требованием, чтобы $\hat{G}$ была с относительными дополнениями и без единицы. Конечно, требование 1 можно заменить требованием делимости и счетности. Требование 1 можно также заменить тем требованием, чтобы G была счетной и свободной. Во всех вариациях теорема 1 остается верной.

Какие же естественные классы с.у.а. групп разрешимы? Разрешимость некоторых классов с.у.а. групп следует, согласно общим теоремам теории моделей (см. ([6])), из факта разрешимости класса всех л.у.а. групп. Имеет место также

Теорема 2. *Класс всех с.у.а. групп с конечным числом нитей разрешим.*

Доказательство. Назовем деревом конечное частично упорядоченное множество, удовлетворяющее аксиоме $(x \leqslant y \,\&\, x \leqslant z) \rightarrow (y \leqslant z \vee \vee z \leqslant y)$. Из классификации с.у.а. групп с конечным числом нитей по элементарным свойствам, указанной в ([2]), следует, что с точностью до элементарной эквивалентности с.у.а. группа с конечным числом нитей есть не что иное, как обобщенное произведение по Феферману и Вооту (см. ([7]) или ([6])) некоторых л.у.а групп относительно алгебры подмножеств некоторого дерева. Из теоремы Фефермана и Воота вытекает таким образом, что разрешимость класса всех с.у.а. групп с конечным числом нитей следует из разрешимости класса всех л.у.а. групп и из разрешимости теории деревьев с кванторами по одноместным предикатам. Последнее очевидным образом следует из ([8]).

Отметим, что разрешимы также многие естественные подклассы класса всех с.у.а. групп с конечным числом нитей: класс всех делимых с.у.а. групп с конечным числом нитей, класс всех с.у.а. групп конечного ранга, класс всех с.у. свободных абелевых групп.

С.у.а. группу G будем называть атомной (соответственно безатомной, с единицей, без единицы), если структура $\hat{G}$ такова. Шириной с.у.а. группы G назовем максимальное число строго положительных и попарно ортогональных элементов G, если это число существует и конечно, и символ ∞ в противоположном случае. С.у.а. группа называется K-группой, если она допускает доопределение умножения на действительные числа, превращающее ее в K-пространство (см. [4]). K-группа — это то же, что полная (в смысле [5], т. е. условно полная как структура) и делимая с.у.а. группа.

Теорема 3. *Каждая K-группа G разлагается в прямую сумму атомной и безатомной K-групп G_a и G_b. Две K-группы G и G' элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда G_a и G_a' элементарно эквивалентны и G_b и G_b' элементарно эквивалентны. Все безатомные K-группы с единицей (соответственно без единицы) элементарно эквивалентны, такие K-группы есть. Все атомные K-группы без единицы элементарно эквивалентны, такие K-группы тоже есть. Наконец, две атомные K-группы с единицей элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда имеют одну и ту же ширину, притом существуют атомные K-группы с единицей любой ширины.*

Теорема 4. *Пусть M — класс K-групп и S — совокупность всех таких натуральных чисел n, что в M есть K-группа ширины n. Класс M разрешим тогда и только тогда, когда множество S рекурсивно. В частности, класс всех K-групп разрешим.*

Замечание. Полная с.у.а. группа G есть прямая сумма некоторой K-группы G_0 и некоторой полной с.у.а. группы G_1 без делимых элементов, см. [5]. Такие G_1 мы рассматривать здесь не будем. Отметим лишь, что, в противоречие с утверждением на стр. 139 книги [5], G_1 не обязательно есть подпрямая сумма л.у. циклических групп. Именно, пусть Q-экстремальный бикомпакт, сепарабельный и без изолированных точек. Существование такого Q не вызывает сомнений. Пусть $C_\infty(Q)$ — K-группа всех непрерывных и почти везде конечных (разрешается принимать значения $\pm\infty$ на нигде не плотных множествах) действительных функций над Q, см. [4]. Обозначим через C^0 l-подгруппу тех функций из $C_\infty(Q)$, все конечные значения которых целочисленны. C^0 — полная с.у.а. группа без делимых элементов, и она не вкладывается с сохранением операций $+$, $\wedge$ и $\vee$ в прямую сумму л.у. архимедовых групп.

В заключение о K-линеалах. K-линеал X мы рассматриваем как пару $\langle R, X'\rangle$ (двуосновная модель), где R — поле действительных чисел, X' — с.у.а. группа и одновременно векторное пространство над R и для всех $x, y \in X'$ и всякого положительного $\xi \in R$ имеет место $x < y \to \xi x < \xi y$. Шириной K-линеала X будем называть ширину с.у.а. группы X'.

Теорема 5. *Если M — класс K-линеалов и супремум ширины K-линеалов из M равен ∞, то класс M неразрешим. Если n — натуральное число и M — класс всех K-линеалов ширины $\leqslant n$, то класс M разрешим.*

Если X — K-линеал ширины 1, обозначим через $J(X)$ линейно упорядоченное множество (л. у. множество) скачков выпуклых подгрупп из X'.

Теорема 6. *Два K-линеала X и Y ширины 1 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда л. у. множества $J(X)$ и $J(Y)$ элементарно эквивалентны. Пусть M — класс K-линеалов ширины 1 и $J(M) = \{J(X)\colon X \in M\}$. Класс M разрешим тогда и только тогда, когда класс $J(M)$ разрешим. В частности, класс всех K-линеалов ширины 1 разрешим.*

Классификация K-линеалов конечной ширины по элементарным свойствам с точностью до K-линеалов ширины 1 аналогична классификации с.у.а. групп с конечным числом нитей с точностью до л.у.а. групп.

Теорема 7. *Пусть n — натуральное число и M — класс всех K-линеалов ширины $\leqslant n$. Класс M разрешим.*

Теорема 8. *Пусть M — класс K-пространств. Класс M разрешим тогда и только тогда, когда ширина K-пространств из M ограничена в совокупности конечным числом.*

Автор выражает благодарность А. И. Кокорину, который привлек внимание автора к задаче о разрешимости класса всех с.у.а. групп, и Ю. Л. Ершову за полезные указания.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
6 XI 1966

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Ш. Гуревич, Алгебра и логика, 3, в. 15 (1964). [2] А. И. Кокорин, Н. Г. Хисамиев, Алгебра и логика, 5, в. 1, 41 (1966). [3] Н. Г. Хисамиев, Алгебра и логика, 5, в. 3, 71 (1966). [4] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. [5] Л. Фукс, Частично упорядоченные алгебраические системы, М., 1965. [6] Ю. Л. Ершов, И. А. Лавров и др., УМН, 20, в. 4, 37 (1965). [7] S. Feferman, R. Vaught, Fund. Math, 47, 57 (1959). [8] J. E. Doner, Notices Am. Math. Soc., 12, № 7, 468 (1965).