А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Зое, любимой! Юрий

А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А

Семинар

Сборник трудов

Том 4

Выпуск 4

РЕДАКЦИОННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ОТДЕЛ СО АН СССР
Н О В О С И Б И Р С К
1 9 6 5

А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

Том 4
Выпуск 4 Руководитель А.И.Мальцев 1965 г.

ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Ю.Ш.Гуревич

В в е д е н и е

I. В работе посредством экзистенциальной интерпретации одной теории в другой (и исходя из [1]) доказывается для ряда теорий T следующее свойство: множество истинных в T и множество опровержимых на конечных T -моделях формул вида $\exists^{\tau}\forall^{n} (n=0,1,\ldots)$ рекурсивно неотделимы. При этом $\tau = \tau(T)$.

В случае теории симметричного предиката доказывается , что найденное значение для τ - наилучшее.

Для теорий рефлексивного симметричного предиката доказывается рекурсивность множества истинных формул вида

$$\exists^{3}\forall^{n}; \ n=0,1,\ldots .$$

В качестве следствия получается наследственная неразрешимость класса конечных метабелевых 2-групп с тождеством $x^{8}=1$.

2. Авторы обзора [2] любезно предоставили мне возможность ознакомиться с содержанием обзора, находящегося в печати. Интерпретируя одну теорию в другой, авторы доказывают для ряда теорий рекурсивную неотделимость множества истинных в T и множества опровержимых на конечных T -моделях формул (в случае групп доказательство взято из [3]).

Упомянутые выше результаты являются усилением в определенном отношении соответствующих результатов обзора и навеяны изучением обзора.

На самом деле уже в обзоре доказывается рекурсивная неотделимость множества истинных и конечно-опровержимых формул с данным и малым, но растущим от теории к теории числом перемен кванторов.

3. Автор благодарен авторам обзора [2] и, в особенности, Ю.Л. Ершову и М.А.Тайцлину. Автор благодарен В.Ф.Костырко, приславшему другое доказательство (опирающееся на один неопубликованный результат **A.S.Kahr'a**) теоремы 2.

§ I. Определения и обозначения

I. I. Слово "формула" обозначает в работе формулу узкого исчисления предикатов (без равенства, если не оговорено противное). Только формулы будут обозначаться буквами α, β, γ, δ с индексами и без них.

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\sigma(\alpha)$ есть совокупность нелогических констант формулы α.

I.3. Слово "сигнатура" обозначает в работе набор символов предикатов. Сигнатуры и только сигнатуры будут обозначаться буквами σ и τ с индексами и без них.

I.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. " α есть σ -формула " равносильно " $\sigma(\alpha) \subseteq \sigma$ ".

I.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\Phi(\sigma)$ есть совокупность всех σ -формул.

I.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Теория T есть пара $<\tau; A>$, где A - набор τ -формул. τ обозначается $\sigma(A)$ и называется сигнатурой T. A называется системой аксиом T. Теории и только теории будут обозначаться буквами S и T с индексами и без них.

I.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. T -формула есть то же, что и $\sigma(T)$-формула.

I.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\Phi(T) = \Phi(\sigma(T))$

I.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A есть система аксиом для T. $И(T)$ есть совокупность всех T -формул, выводимых из A.

I.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две теории T_1 и T_2 называются равными, если $И(T_1) = И(T_2)$.

I.11. $T_1 = T_2$ влечет $\sigma(T_1) = \sigma(T_2)$.

I.12. $T = <\sigma(T); И(T)>$.

I.13. Данное здесь определение теории соответствует определению теории в [4].

2.I. Предполагается известным понятие модели данной сигнатуры.

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $T = <\tau; A>$. T -модель есть такая τ -модель, то есть такая модель сигнатуры τ, на которой общезначимы все формулы из A. Модели и только модели будут обозначаться буквами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ с индексами и без них.

2.3. Согласно теореме Геделя-Мальцева, $И(T)$ состоит из тех и только тех T -формул, которые верны на каждой T -модели

2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $И^f(T)$ есть совокупность T -формул, истинных на каждой конечной T -модели.

2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $T^f = \langle \sigma(T)\,;\ И^f(T) \rangle$.

2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $B(T)$ $(B^f(T))$ есть совокупность T - формул, выполнимых хотя бы на одной (хотя бы на одной конечной) T - модели.

2.7. Пусть $\alpha \in \Phi(T)$.

$\alpha \in И(T)$ равносильно $\neg\alpha \,\bar{\in}\, B(T)$.

$\alpha \in И^f(T)$ равносильно $\neg\alpha \,\bar{\in}\, B^f(T)$.

2.8. $И(T^f) = И^f(T)$.

2.9. $B(T^f) = B^f(T)$.

2.10. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** $|\mathfrak{M}|$ есть основное множество модели $\mathfrak{M}$.

2.11. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть α не содержит свободных переменных. "$\mathfrak{M}$ есть α -модель" обозначает, что α истинна на $\mathfrak{M}$.

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\Phi^*(\sigma)$ есть совокупность формул из $\Phi(\sigma)$ без свободных переменных и имеющих пренексную (предваренную) нормальную форму; кроме того, будем предполагать, что бескванторная часть формул из $\Phi^*(\sigma)$ находится в совершенной дизъюнктивной нормальной форме.

3.2. Следующее определение поясним на примерах. $\sigma_{\forall^r\exists^\infty}$ есть совокупность формул из $\Phi^*(\sigma)$ с приставками $\forall^i\exists^j$, где $0 \le i \le r$. Аналогично, $\sigma_{\forall^\infty\exists^2\forall^\infty}$ есть совокупность формул из $\Phi^*(\sigma)$ с приставками $\forall^i\exists^j\forall^k$, где $j = 0,1,2$. Выражения $\forall^r\exists^\infty$, $\forall^\infty\exists^2\forall^\infty$ и тому подобное будем называть типом приставок. Кроме того, совокупность всех возможных приставок тоже будем называть типом приставок, этот тип будем обозначать ∞. Буква w будет служить общим обозначением для типа приставок.

3.3. Как хорошо известно, существует алгоритм, который произвольной формуле без свободных переменных из $\Phi(\sigma)$ ставит в соответствие эквивалентную формулу из $\Phi^*(\sigma)$. Зафиксируем один такой алгоритм. Результат его применения будем обозначать звездочкой. Относительно этого алгоритма будем предполагать, что если $\alpha^*, \beta^* \in \sigma_{\forall^r\exists^\infty}$, то и $(\alpha\,\&\,\beta)^* = (\alpha\cdot\beta)^* \in \sigma_{\forall^r\exists^\infty}$; а также, что верны утверждения 1.3., 1.5., 1.8. из § 2. Нетрудно видеть, что существует алгоритм, удовлетворяющий всем этим предположениям.

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\sigma^0 = \{P_j^i \mid i,j = 0,1,\ldots\}$. Здесь P_j^i - символ i -местного предиката. Все рассматриваемые ниже сигнатуры будут подмножествами σ^0. Вместо P_0^2 будем писать P, а вместо Pxy и $\neg Pxy$ будем писать просто xy и $\neg xy$, соответственно.

4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $S^{\circ} = < \sigma^{\circ} ; \varnothing >$.

4.3. Пусть W – тип приставок. Мы будем рассматривать следующие свойства теории T сигнатуры τ :

(W) для всякого $\mathcal{D}$ $(\tau_W \cap B^f(T)) \subseteq \mathcal{D} \subseteq (\tau_W \cap B(T))$ влечет нерекурсивность $\mathcal{D}$.

4.4. Свойство $(\forall^{\tau} \exists^{\infty})$ теории T сигнатуры τ равносильно следующему свойству: множество истинных в T и множество опровержимых на конечных T -моделях формул из $\tau_{\exists \tau \forall^{\infty}}$ рекурсивно неотделимы.

4.5. Аналогично, свойство (∞) равносильно рекурсивной неотделимости множеств истинных и конечно-опровержимых в формул.

4.6. Пусть:

4.6.I. $\sigma(S) = \sigma$, $\sigma(T) = \tau$;

4.6.2. S удовлетворяет (W_1) ;

4.6.3. алгоритм $\mathfrak{A}$ переводит произвольную формулу $\alpha \in \sigma_{W_1}$ в $\beta \in \tau_{W_2}$ и при этом:

$$\alpha \in B(S) \Longleftarrow \beta \in B(T),$$
$$\alpha \in B^f(S) \Longrightarrow \beta \in B^f(T).$$

Тогда T удовлетворяет (W_2) . (Это утверждение – аналог соответствующего утверждения из [2]).

2. Экзистенциальная интерпретация

I.I. Пусть $S = < \sigma ; A >$, $T = < \tau ; B >$ и каждому P_j^i из σ поставлены в соответствие экзистенциальные τ -формулы Q_j^{i1} и Q_j^{i2} с i свободными переменными. Пусть также f^1 и f^2 – экзистенциальные формулы с одним свободным переменным.

I.2. Опустим в 3.I. из § I. требование не иметь свободных переменных; полученную совокупность формул будем отмечать тильдой (вместо звезды). Определим индуктивно отображение из $\tilde{\Phi}(\sigma)$ в $\Phi(\tau)$:

I.2.I. $\varphi P_j^i x_1 \ldots x_n = Q_j^{i1} x_1 \ldots x_n$,

I.2.2. $\varphi \neg P_j^i x_1 \ldots x_n = Q_j^{i2} x_1 \ldots x_n$,

I.2.3. $\varphi(\alpha \,\&\, \beta) = \varphi\alpha \,\&\, \varphi\beta$,

I.2.4. $\varphi(\alpha \vee \beta) = \varphi\alpha \vee \varphi\beta$,

I.2.5. $\varphi \exists x \alpha = \exists x (f^1 x \,\&\, \alpha)$,

I.2.6. $\varphi \forall x \alpha = \forall x (f^2 x \vee \alpha)$.

I.3. Если $\alpha \in \sigma_{\forall \tau \exists \infty}$, то (см. 3.3. из § I) $(\varphi\alpha)^* \in \tau_{\forall \tau \exists \infty}$.

I.4. Положим

$$\beta^o = \forall x[(f'x \vee f^2x) \& (\neg f'x \vee \neg f^2x)] \&$$
$$\& \bigwedge_{P_j^i \in \mathfrak{S}} \forall x_1 \dots x_i \{ f^2x_1 \vee \dots \vee f^2x_i \vee$$
$$\vee [(Q_j^{i1}x_1 \dots x_i \vee Q_j^{i2}x_1 \dots x_i) \& (\neg Q_j^{i1}x_1 \dots x_i \vee \neg Q_j^{i2}x_1 \dots x_i)]\} .$$

Пусть b^κ - число $\exists$ в f^κ, $b_j^{i\kappa}$ - число $\exists$ в $Q_j^{i\kappa}$ и
$$b = \max_{i,j,\kappa} (2b^\kappa + 1, 2b_j^{i\kappa} + i) .$$

I.5. $(\beta^o)^* \in \tau_{\forall b \exists^\infty}$.

I.6. Предположим, далее, что A (см. I.I) состоит из одной аксиомы $\alpha^o \in \mathfrak{S}_{\forall a \exists^\infty}$.

I.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\psi\alpha = \varphi\alpha \,\&\, \varphi\alpha^o \,\&\, \beta^o$.

I.8. Если $\alpha \in \mathfrak{S}_{\forall \tau \exists^\infty}$, то $(\psi\alpha)^* \in \tau_{\forall m \exists^\infty}$, где $m = \max(\tau, a, b)$.

I.9. Пусть $\mathfrak{N}$ - модель для $\psi\alpha$. Определим на

$$\{ x \mid x \in |\mathfrak{N}| \,\&\, f^1 x \} ,$$

$$P_j^i x_1 \dots x_i \equiv Q_j^{i1} x_1 \dots x_i , \quad P_j^i \in \mathfrak{S}.$$

Получим $\mathfrak{S}$ -модель, которую обозначим $\mathfrak{N}^*$ и которая, очевидно, есть S -модель и модель для α .

I.I0. $\psi\alpha \in B(T)$ влечет $\alpha \in B(S)$.

I.II. Пусть теперь по каждой конечной S -модели $\mathfrak{M}$ для α мы можем построить конечную T -модель $\mathfrak{N}$ для $\psi\alpha$. Тогда $\alpha \in B^f(S)$ влечет $\psi\alpha \in B^f(T)$. Отсюда и из I.I0., I.8. и 4.6. из § I получаем: " S удовлетворяет $(\forall^\tau \exists^\infty)$ " влечет " T удовлетворяет $(\forall^m \exists^\infty)$", где $m = \max(\tau, a, b)$ (см. I.4., I.6.).

2.I. Освободимся от предположения I.6., но предположим, что нам удалось построить такую $\gamma \in \tau_{\forall c \exists^\infty}$, что:

а) если T -модель $\mathfrak{N}$ есть модель для γ , то $\mathfrak{N}^*$ (см. I.9.) есть S -модель;

б) $(\gamma \supset \beta^o) \in И(T)$;

в) по всякой конечной S -модели для α мы можем построить конечную T -модель для $(\varphi\alpha \,\&\, \gamma)$. Тогда

$$\alpha \in B(S) \Longleftarrow (\varphi\alpha \,\&\, \gamma) \in B(T)$$

и

$$\alpha \in B^f(S) \Longrightarrow (\varphi\alpha \,\&\, \gamma) \in B^f(T) ,$$

и потому " S удовлетворяет $(\forall^\tau \exists^\infty)$ " влечет " T удовлетворяет $(\forall^m \exists^\infty)$ ", где $m = \max(\tau, c)$.

2.2. Рассуждения, аналогичные I.I. - 2.I., можно провести , не используя f^2. Для этого нужно заменить везде выше f^2 на $\neg f'$. При этом $\alpha\in\sigma_{\forall^{\tau}\exists^{\infty}}$ влечет $(\varphi\alpha)^*\in\tau_{\forall}(\tau+\tau b^t)_{\exists^{\infty}}$.

3.I. Пусть в теории T равносильны следующие формулы:

$$\exists y_1\dots y_m\,\mathfrak{A}x_1,\dots,x_i,y_1,\dots,y_m$$

и

$$\forall y_1\dots y_n\,\mathfrak{B}x_1,\dots,x_i,y_1,\dots,y_n.$$

Пусть, кроме того, $P_j^i\bar{\in}\,\sigma(T)$. Положим: $T'=<\{\sigma(T),\,P_j^i\}$; $\{И(T),P_j^ix_1\dots x_i\equiv\exists y_1\dots y_m\mathfrak{A}x_1\dots y_m\}>$. Тогда $B(T')\cap\Phi(T)=B(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $B(T'\cap\Phi(T)\subseteq B(T)$ очевидным образом. Обратно. Пусть $\mathfrak{M}$ – T - модель для α. Положим дополнительно: $P_j^ix_1\dots x_i\equiv\exists y_1\dots y_m\mathfrak{A}x_1\dots y_m$. $\mathfrak{M}$ превращается в T' - модель $\mathfrak{M}$. При этом α выполнима и в $\mathfrak{M}$.

3.2. В условиях предыдущего пункта пусть $\alpha'\in\sigma(T')_{\forall^{\tau}\exists^{\infty}}$. Заменим в α' P_j^i на $\exists y_1\dots y_m\mathfrak{A}$, $\neg P_j^i$ на $\exists y_1\dots y_n\mathfrak{B}$. Получим формулу α такую, что $\alpha\in\sigma(T)_{\forall^{\tau}\exists^{\infty}}$ и α эквивалентна α' в T'. Из этого сведения и из 3.I. следует, что если T' удовлетворяет $(\forall^{\tau}\exists^{\infty})$, то и α удовлетворяет $(\forall^{\tau}\exists^{\infty})$.

4.I. В следующих параграфах мы будем неоднократно делать следующее. Имеем исходную теорию S, о которой уже известно, что она удовлетворяет $(\forall^{\tau}\exists^{\infty})$ при некотором τ. Интерпретируем S экзистенциально в исследуемой теории T (так, как это показывалось выше) и доказываем, что и T удовлетворяет $(\forall^{m}\exists^{\infty})$ при некотором m.

4.2. При этом пользуемся обозначениями пунктов 4.I. из § I и I.I. из § 2. Вместо Q_0^{21} и Q_0^{22} будем писать просто Q^1 и Q^2.

4.3. Порядок работы. Выписываем f^{κ} и $Q_j^{i\kappa}$ и формулы $\gamma_1,\gamma_2,\dots$, конъюнкция которых будет та $\mathcal{T}$, о которой говорится в 2.I. Будем использовать при этом 3.I. и 3.2. из § 2. Проверять нужно лишь 2.I. а), 2.I. б) и 2.I. в).

§ 3. Теория двуместного предиката.

I.I. ТЕОРЕМА I. Пусть σ содержит три двуместных предиката и все одноместные. $<\sigma;\varnothing>$ удовлетворяет $(\forall\exists\forall\exists)$.

Доказана в [I].

I.2. Пусть $\alpha=\forall x\exists y\forall z\,\mathfrak{A}xyz$ $P_j^2\bar{\in}\sigma(\alpha)$. Тогда

$$\alpha\equiv\forall xyz\exists u\left[P_j^2xu\,\&\,(P_j^2xy\supset\mathfrak{A}xyz)\right].$$

I.3. Пусть σ содержит 4 двумест -

ных предиката и все одноместные. $\langle \sigma ; \emptyset \rangle$ удовлетворяет $(\forall^3 \exists^2)$, а потому и $(\forall^3 \exists^\infty)$. Следует из I.I. и I. 2..

I.4. Пусть $T = \langle P, P_1^2, P_2^2, P_3^2, P_4^2 ; \emptyset \rangle$.

удовлетворяет $(\forall^3 \exists^\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ содержит $P_1^2, P_2^2, P_3^2, P_4^2$ и все одноместные предикаты и $S = \langle \sigma ; \emptyset \rangle$. Согласно I.3., удовлетворяет $(\forall^3 \exists^\infty)$.

I.4.I. $\gamma_1 = \exists x \cdot xx$.

$\gamma_2 = \forall xyz [xy \cdot yy \supset (xz \equiv yz : zx \equiv zy)]$.

I.4.2. Из $\gamma_1 \& \gamma_2$ следует, что $\exists y (yy \cdot \neg yx) \equiv \forall y (yy \supset \neg yx)$. Полагаем: $gx = \exists y (yy \cdot \neg yx)$. (См. 3.I. и 3.2. из § 2).

I.4.3.:
$$\gamma_3 = \forall_{xy} [\neg gx \cdot \neg gy \cdot xy \supset \neg yx].$$
$$\gamma_4 = \forall_{xyz} [\neg gx \cdot \neg gy \cdot \neg gz \cdot xy\, yz \supset xz].$$
$$\gamma_5 = \forall xy (\neg xx \cdot yy \supset \neg xy).$$
$$\gamma_6 = \forall xyz [\neg gx \cdot \neg gy \cdot \neg xy \cdot \neg yx \supset (xz \equiv yz \cdot zx \equiv zy)].$$

I.4.4. Пусть $\ell = max(j+1 \mid P_j^1 \in \sigma(\alpha))$.
$$\gamma_7 = \gamma_7(\alpha) = \exists x_0 \ldots x_\ell \Big[x_0 x_0 \cdot \bigwedge_{i=0}^{\ell} \neg g x_i \bigwedge_{i=0}^{\ell-1} x_i x_{i+1}\Big]$$

I.4.5.
$$f^1 x = gx,\ f^2 x = \neg gx,\ Q_j^{21} xy = P_j^2 xy,\ Q_j^{22} xy = \neg P_j^2 xy$$
$$Q_j^{11} x = \exists x_0 \ldots x_{j+1} [x_0 x_0 . \wedge \neg g x_i . \wedge x_i x_{i+1} . x x_{i+1}].$$
$$Q_j^{12} x = \exists x_0 \ldots x_{j+1} [x_0 x_0 . \wedge \neg g x_i . \wedge x_i x_{i+1} \cdot \neg x_{i+1}].$$

I.4.6. Условия пункта 2.I. из § 2, очевидно, выполнены.

2. ТЕОРЕМА 2. Пусть $T = \langle P ; \emptyset \rangle$. T удовлетворяет $(\forall^3 \exists^\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $S = \langle P_0^2, \ldots, P_4^2 ; \emptyset \rangle$.

2.I. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_6$ такие же, как в I.4.

$\gamma_7 = \exists x_0 \ldots x_6 [x_0 x_0 \cdot \wedge \neg g x_i \cdot \wedge x_i\, x_{i+1}]$.

2.2. Из $\gamma_1 \& \ldots \gamma_7$, следует, что
$$h_j x = \exists x_0 \ldots x_{j+1} [x_0 x_0 . \wedge \neg g x_i . \wedge x_i x_{i+1} \cdot x x_{j+1}] \equiv$$
$$\equiv \forall x_0 \ldots x_{j+1} [(x_0 x_0 . \wedge \neg g x_i \cdot \wedge x_i x_{i+1}) \supset x x_{j+1}];\ j = 0,1,2,3,4.$$

2.3. $\gamma_8 = \bigwedge_{i \neq j} \forall x \left[gx . h_i x \supset \neg h_j x \right].$

2.4. $f^1 x = gx \cdot \bigwedge \neg h_j x.$

$f^2 x = \neg gx \vee \bigvee_j h_j x.$

2.5. $\gamma_9 = \bigwedge_j \forall x \exists y \left[f^1 x \supset gy \cdot h_j y \cdot xy \right],$

$\gamma_{10} = \bigwedge_j \forall xyz \left[f^1 x \cdot gy \cdot gz \cdot h_j y \cdot h_j z . xy . xz \supset yz \right],$

$\gamma_{11} = \bigwedge_j \forall xyz \left[gx \cdot gy . h_j x . h_j y . xy \supset (xz \equiv yz \cdot zx \equiv zy) \right];$

$j = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

2.6. $Q_j^{21} xy = \exists uv \left[f^1 x . f^1 y \cdot gu . gv . h_j u . h_5 v . xu . yv . uv \right],$

$Q_j^{22} xy = \exists uv \left[f^1 x . f^1 y . gu . gv . h_j u . h_5 v . xu . yv . \neg uv \right]; j = 0, \ldots, 4.$

2.7. Условия пункта 2.I. из § 2 без труда проверяются.

2.8. О неразрешимости множества $B(T) \cap \{P\}_{\forall^3 \exists^\infty}$ см. в [5].

§ 4. Симметрический предикат

ТЕОРЕМА 3. Теория симметрического предиката удовлетворяет $(\forall^3 \exists^\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

I. $S = \langle P ; \emptyset \rangle, \quad T = \langle P ; xy \supset yx \rangle.$

2. $\gamma_1 = \exists xy \left[xx \cdot yy \cdot \neg xy \right].$

$\gamma_2 = \forall xyz \left[xx \cdot yy \cdot zz \cdot \neg xy \supset (xz \vee yz) \right]$

$\gamma_3 = \forall xyz \left[xx \cdot yy \cdot xy \supset (xz \equiv yz) \right].$

3. $f^1 x = \exists uv \left[\neg xx . uu . vv . \neg uv . \neg xu . \neg xv \right].$

$f^2 x = \exists u \left[uu \cdot ux \right].$

4. $gx = \exists uv \left[\neg xx . uu . vv . \neg uv . \neg xu . \neg xv \right] \equiv$

$$\equiv \forall uv \left\{ \neg xx \,\&\, \left[(uu . vv . \neg uv) \supset (ux \vee vx) \right] \right\}.$$

$hx = \exists uv \left[\neg xx \cdot uu \cdot vv \cdot \neg uv \cdot ux \cdot vx \right] \equiv$

$$\equiv \forall u \left\{ \neg xx \,\&\, \left[uu \supset ux \right] \right\}.$$

5. $\gamma_4 = \forall x \exists y [f^1x \supset gy \cdot xy]$, $\gamma_5 = \forall x \exists y [f^1x \supset hy \cdot xy]$,

$\gamma_6 = \forall xyz [f^1x \cdot gy \cdot gz . xy . xz \supset yz]$,

$\gamma_7 = \forall xyz [f^1x \cdot hy . hz . xy\, xz \supset yz]$.

$\gamma_8 = \forall xyz [gx \cdot gy \cdot xy \supset (xz \equiv yz)]$.

$\gamma_9 = \forall xyz [hx \cdot hy \cdot xy \supset (xz \equiv yz)]$.

6. $Q^1xy = \exists uv [f^1x \cdot f^1y \cdot gu . hv . xu . yv \cdot uv]$.

$Q^2xy = \exists uv [f^1x \cdot f^1y \cdot gu \cdot hv \cdot xu \cdot yv \cdot \neg uv]$.

7. Условия пункта 2.I. из § 2 очевидны.

§ 5. Теория иррефлексивного предиката

I. При доказательстве предыдущей теоремы нами доказана по сути дела следующая

ЛЕММА: Пусть $S = \langle P, P^1_0 ; \varnothing \rangle$, S удовлетворяет $(\forall^3 \exists^\infty)$.

2. ТЕОРЕМА 4. Теория иррефлексивного предиката удовлетворяет $(\forall^3 \exists^\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2.I. Пусть S имеет тот же смысл, что и в I. $T = \langle P ; \neg xx \rangle$.

2.2. $\gamma_1 = \forall x \exists y [xy \cdot \neg yx \vee \neg xy \cdot yx]$.

$\gamma_2 = \forall xyz \{\neg [xy \cdot \neg yx \cdot yz \cdot \neg zy]\}$.

2.3. $f^1x = \exists y [\neg xy \cdot yx]$, $f^2x = \exists y [xy \cdot \neg yx]$.

2.4. Следствия из γ_1 & γ_2 :

$$\forall xy [f^1x \cdot f^1y \cdot xy \supset yx],$$
$$\forall xy [f^2x \cdot f^2y \cdot \neg xy \supset \neg yx].$$

2.5. $\gamma_3 = \forall xyz [f^2x \cdot f^2y \cdot f^2z \cdot \neg xy \cdot \neg yz \supset \neg xz]$.

$\gamma_4 = \exists xy [f^2x \cdot f^2y \cdot xy]$.

$\gamma_5 = \forall xyz \{\neg [f^2x \cdot f^2y \cdot f^2z \cdot xy \cdot yz \cdot zx]\}$.

$$\gamma_6 = \forall xyz\left[f^2x.\,f^2y.\neg xy \supset (xz\equiv yz.\,zx\equiv zy)\right].$$

$$\gamma_7 = \forall xy\ \left[f^1x\cdot f^2y \supset \neg xy\right].$$

2.6. Из $\gamma_1,\dots,\gamma_6$ следует,что отношение $\neg xy$ на $\{x|f^2x\}$ есть отношение эквивалентности; причем существует в точности два класса по этому отношению и элементы одного и того же класса неразличимы.

2.7. $$Q_0^{11}x = \exists y\left[f^1x\cdot f^2y.\neg yx\right],$$

$$Q_0^{12}x = \exists yz\left[f^1x\cdot f^2y\cdot f^2z\cdot yz\cdot yx\cdot zx\right].$$

$$Q^1xy = xy,\quad Q^2xy = \neg xy.$$

2.8. Условия пункта 2.I. из § 2 выполнены.

3. Теории рефлексивного и иррефлексивного предикатов легко сводятся друг к другу. Достаточно лишь перейти от предиката и его отрицанию. Так что эти теории одновременно удовлетворяют или не удовлетворяют свойствам (W) .

Аналогичное замечание относится и к теориям рефлексивного и иррефлексивного симметрических предикатов.

4. Как известно (см. [5]),

$$B(S)\cap\{P\}_{\exists^\infty\forall^2\exists^\infty} = B^f(S)\cap\{P\}_{\exists^\infty\forall^2\exists^\infty},$$

где $S=\langle P;\varnothing\rangle$. Так что множество $B(S)\cap\{P\}_{\exists^\infty\forall^2\exists^\infty}$ разрешимо. Все это относится также и к $T_1=\langle P; xy\supset yx\rangle$ и к $T_2=\langle P;\neg xx\rangle$, ибо:

$$\alpha\in B(T_1)\Longleftrightarrow\left[\forall xy(xy\supset yx)\cdot\alpha\right]\in B(S),$$

$$\alpha\in B^f(T_1)\Longleftrightarrow\left[\forall xy(xy\supset yx)\cdot\alpha\right]\in B^f(S),$$

$$\alpha\in B(T_2)\Longleftrightarrow\left[\forall x(\neg xx)\cdot\alpha\right]\in B(S),$$

$$\alpha\in B^f(T_2)\Longleftrightarrow\left[\forall x(\neg xx)\cdot\alpha\right]\in B^f(S).$$

§ 6. Теория иррефлексивного симметрического предиката

I. ТЕОРЕМА 5. Пусть $T=\langle P;\neg xx, xy\supset yx\rangle$. Множество $B(T)\cap\{P\}_{\forall^3\exists^\infty}$ разрешимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

I.I. Возьмем $\alpha=\forall x_1x_2x_3\exists y_1\dots y_n\mathfrak{A}\in\{P\}_{\forall^3\exists^\infty}$

и покажем, как определить, принадлежит ли α к $B(T)$. Сразу предположим, что $\mathfrak{A}$ не есть тождественно ложная формула в T. Тогда $\mathfrak{A}$ можно представить в следующей дизъюнктивной нормальной форме: $\mathfrak{A} = \bigvee \mathfrak{A}$. Здесь $\mathfrak{A}^i$ – одно из возможных непротиворечивых в $\mathcal{L}^i$ и полных описаний модели $<x_1 \ldots y_8>$. Пусть $\mathcal{L}^i$ – соответсвующее $\mathfrak{A}^i$ полное описание модели $<x_1 x_2 x_3>$, $\mathcal{L} = \bigvee_i \mathcal{L}^i$, $\beta = \forall x_1 x_2 x_3 \mathcal{L}$.

I.2. Положим

$$\mathcal{D}^1 x_1 x_2 x_3 = [\neg x_1 x_2 \cdot \neg x_2 x_3 \cdot \neg x_3 x_1], \mathcal{D}^2 x_1 x_2 x_3 = [x_1 x_2 \cdot \neg x_2 x_3 \cdot \neg x_3 x_1],$$

$$\mathcal{D}^3 x_1 x_2 x_3 = [\neg x_1 x_2 \cdot x_2 x_3 \cdot \neg x_3 x_1], \mathcal{D}^4 x_1 x_2 x_3 = [\neg x_1 x_2 \cdot \neg x_2 x_3 \cdot x_3 x_1],$$

$$\mathcal{D}^5 x_1 x_2 x_3 = [\neg x_1 x_2 \cdot x_2 x_3 \cdot x_3 x_1], \mathcal{D}^6 x_1 x_2 x_3 = [x_1 x_2 \cdot \neg x_2 x_3 \cdot x_3 x_4],$$

$$\mathcal{D}^7 x_1 x_2 x_3 = [x_1 x_2 \cdot x_2 x_3 \neg x_3 x_1], \mathcal{D}^8 x_1 x_2 x_3 = [x_1 x_2 \cdot x_2 x_3 \cdot x_3 x_1].$$

I.3. Разберем случай, когда каждая $\mathcal{D}^j$ встречается среди $\mathcal{L}^i$. В этом случае $\beta \in И(T)$ и $\alpha \in B(T)$. Докажем последнее. Построим T -модель для α:

0 -ой шаг. $|\mathfrak{M}^0|$ состоит из одного элемента.

$(k+1)$ -ый шаг. Пусть $\mathfrak{M}^k$ уже построена. Выбираем в $|\mathfrak{M}^k|$ три элемента x_1, x_2, x_3 в соответствии с планом X, о котором будет сказано ниже. Пусть имеет место $\mathcal{D}^j x_1 x_2 x_3$. Согласно предположению $\mathcal{D}^j$ совпадает с некоторым $\mathcal{L}^i$. Берем новые элементы $y_1, \ldots, y_n$. Соединим их между собой и с элементами так, как это записано в $\mathfrak{A}^i$. А для всякого z из $|\mathfrak{M}^k|$, отличного от x_1, x_2 и x_3, полагаем $\neg z y_1, \ldots, \neg z y_n$.

Модель $\mathfrak{M}$ есть объединение всех $\mathfrak{M}^k$. План X состоит в том, что выбирать нужно так, чтобы всякие три элемента (не обязательно различные) были выбраны на каком-нибудь шаге. Ясно, что это сделать можно.

I.4. Пусть теперь среди $\mathcal{L}^i$ не встречается лишь $\mathcal{D}^8$. Зачеркнем в α те $\mathfrak{A}^i$, что в модели $<x_1, \ldots, y_n>$ с описанием $\mathfrak{A}^i$ есть подмодели, с описанием $\mathcal{D}^8$. Получим формулу α'. Ясно, что $\alpha \in B(T)$ равносильно $\alpha' \in B(T)$. Если при этом среди $(\mathcal{L}^i)'$ (соответствующих α') нет какой-нибудь из $\mathcal{D}', \ldots, \mathcal{D}^7$, то вопрос о выполнимости α' будет разобран ниже. Пусть среди $(\mathcal{L}^i)'$ есть $\mathcal{D}^1, \ldots, \mathcal{D}^7$. Тогда $\alpha' \in B(T)$, ибо в точности так, как это сделано в I.3. для неё можно построить модель.

I.5. Очевидно, $\alpha \in B(T)$ влечет $\beta \in B(T)$. Если среди $\mathcal{L}^i$ нет $\mathcal{D}^1$, то уже β не выполнима, ибо $\forall x \mathcal{D}' xxx \in И(T)$.

I.6. Пусть среди $\mathcal{L}^i$ нет одной из $\mathcal{D}^2$ или $\mathcal{D}^3$ или $\mathcal{D}^4$. Отсюда следует, что всякая T -модель для α есть модель теории $T^1 = \langle P; \neg xx, \neg xy \supset \neg yx, \neg xy \cdot \neg yz \, \neg xz \rangle$, которая разрешима.

I.7. Пусть среди $\mathcal{L}^i$ нет одной из $\mathcal{D}^5$ или $\mathcal{D}^6$ или $\mathcal{D}^7$. Пусть теперь в некоторой T -модели $\mathfrak{M}$ есть такие x и y, что имеет место xy. Тогда в $\mathfrak{M}$ есть подмодели с описаниями $\mathcal{D}^5$, $\mathcal{D}^6$ и $\mathcal{D}^7$. Всякая же T -модель, в которой нет таких двух элементов, элементарно эквивалентна единичной. Так что $\alpha \in B(T)$ в том и только том случае, если α выполняется на единичной модели.

2. ТЕОРЕМА 6. Пусть $T = \langle P; \neg xx, xy \supset yx \rangle$. T удовлетворяет $(\forall^6 \exists^\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

2.1. $S = \langle P; \neg xx \rangle$. S удовлетворяет $(\forall^3 \exists^\infty)$ согласно теореме 4.

2.2. $f^1_x = \exists uv \left[xu \cdot uv \cdot vx \right]$,

$$f^2_x = \exists uvw \left[uv \cdot vw \cdot wu \cdot \neg xu \cdot \neg xv \cdot \neg xw \right]$$

2.3. $\gamma_1 = \forall x \left[f^1 x \vee f^2 x \right]$,

$$\gamma_2 = \forall x \left[\neg f^1 x \vee \neg f^2 x \right].$$

2.4. Ниже в этом доказательстве элементы, удовлетворяющие f^1 обозначаются a и b; элементы, удовлетворяющие f^2, $-x$, y, u, u_1, u_2, v; ξ обозначает произвольный элемент.

2.5. $\gamma_3 = \forall ab \left[\forall \xi (a\xi \equiv b\xi) \equiv \neg ab \right] \cdot$

$$\gamma_4 = \forall abxyuv \left[ax \cdot xy \cdot yb \cdot au \cdot uv \cdot vb \supset xv \cdot yu \right] \cdot$$

$$\gamma_5 = \forall xyuv\xi \left[xy \cdot uv \cdot xv \cdot yu \supset (x\xi \equiv u\xi) \right].$$

$$\gamma_6 = \forall xyu_1u_2v\xi \left[xy \cdot xu_1 \cdot xu_2 \cdot yv \cdot \neg vu_1 \cdot \neg vu_2 \supset (u_1\xi \equiv u_2\xi) \right].$$

2.6. Пусть $Fabxyuv$ - сокращение для

$$\left[ax \cdot xy \cdot yb \cdot xu \cdot yv \cdot \neg uv \right]$$

$$\gamma_7 = \forall ab \left[(\exists xyuv\, Fabxyuv) \vee \neg ab \right].$$

2.7. $Q^1_{ab} = \exists xyuv \left[ab \cdot Fabxyuv \cdot ub \right]$,

$$Q^2_{ab} = \exists xyuv \left[\neg ab \vee (Fabxuv \cdot \neg ub) \right].$$

2.8. Условия пункта 2.I. из § 2 выполнены.

3. Автор не знает, удовлетворяет ли теория иррефлексивного симметрического предиката $(\forall^4\exists^\infty)$ и $(\forall^5\exists^\infty)$.

§ 7. К теории групп

I. ЛЕММА I. Пусть T_p есть класс метабелевых p -групп (p -простое число) с тождеством $x^{p^2}=1$ в случае $p\neq 2$ и $x^8=1$ в случае $p=2$. T_p удовлетворяет $(\forall^{18}\exists^\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

I.I. $S=\langle P;\ Pxx,\ Pxy\supset Pyx\rangle$. Согласно теореме 6. и пункту 3 из § 5 S удовлетворяет $(\forall^6\exists^\infty)$.

I.2. В этом параграфе мы не будем писать xy вместо Pxy.

I.3. $xy=yx$ есть сокращение для $\exists z\,(xy=z\cdot yx=z)$ и эквивалентно $\forall z\,(xy=z\supset yx=z)$. Аналогично $x=1$,

$$x^m=1,\ x=y,\ O(x)=m,\ O(x)<m,\ x^a\cdot y^b=z$$

и т.п. можно определить как сокращение экзистенциальных формул , каждая из которых эквивалентна некоторой универсальной формуле . См. теперь 3.I. и 3.2. из § 2.

I.4. $Q^1xy=(xy=yx)$, $Q^2xy=(xy\neq yx)$.

I.5. $f'_x=\{O(x)=p\cdot\exists y(xy\neq yx)\cdot\exists z(O(z)=p^2\cdot xz=zx)\}$ при $p\neq 2$,

$f'_x=\{O(x)=4\cdot\exists y(xy\neq yx)\cdot\exists z(O(z)=8\cdot xz=zx)\}$ при $p=2$.

f^2 определяться не будет (см. 2.2. из § 2). Первые два из условий пункта 2.I. из § 2 тривиальны (в качестве γ нужно взять какую-нибудь формулу из $И(T)$). Переходим к проверке условия 2.I. в).

I.6. Пусть $\mathfrak{M}$ - конечная S -модель для α и m - число элементов в $\mathfrak{M}$. Можно считать, что $|\mathfrak{M}|=m=\{0,1,\dots,m-1\}$.

I.7. Напомним определение полупрямогс произведения групп. $G_1\lambda G=G_3$ означает, что G_3 - нормальный делитель в G_3 , $G_3/G_1\cong G_2$, G_2 - подгруппа в G_3 , и - $G_1\cap G_2=1$.

I.8. Ниже мы будем определять некоторые группы. Все они принадлежат T_p . Определяющие отношения, вытекающие из аксиом T_p , будем опускать.

I.9. A есть группа с образующими a_i, a_{ij} $(i,j\in m)$ и следующими определяющими соотношениями: $a_i^{a_j}=a_i\cdot a_{ij}$, $a_{ij}=1$ для тех i,j , что имеет место P_{ij} ; и, кроме того, $a_i^p=1$ при $p\neq 2$ и $a_i^4=1$ при $p=2$.

I.IO. $B=\left[A x \prod_{i,j\in m}\{b_{ij}\}\right] \lambda \prod_{j\in m}\{b_j\}$.

Здесь $a_i^{b_{ij}}=a_i\cdot b_{ij}$, $b_{ii}=1$, $b_{ij}^p=1$. Элементы, удовлетворяющие f' , имеют в B вид: $a_i^{\xi}\cdot z$, где $\xi\neq 0 \pmod p$ и z принадлежит центру группы B . B и есть та конечная группа, на которой выполняется $\varphi\alpha$.

2. СЛЕДСТВИЕ. Теория конечных метабелевых 2-групп с тождеством $x^8=1$ наследственно неразрешима.

Насколько известно автору, неразрешимость теории 2 - групп здесь доказывается впервые.

3.ЛЕММА 2. T_p удовлетворяет $(\forall^{12}\exists^{\infty})$.

Докажем лемму лишь для случая $p\neq 2$. Случай $p=2$ разбирается совершенно аналогично.

3.I. Пусть

$$Z(x)=\exists yz\{O(x)=p\,\&\underset{p\nmid\xi\vee p\nmid\eta}{\wedge} o(y^{\xi}z^{\eta})=p^2\,\&\,xy=yx\,\&\,xz=zx\}$$

В группе B из I.IO. $Z(x)$ равносильно $O(x)=p\,\&\,\forall y(xy=yx)$

3.2. Запишем в I.4. аксиому

$$\gamma=\left[Z(x)\supset\forall y\,(xy=yx)\right].$$

Затем (см. 3.I. и 3.2. из § 2) в определении f' $\exists y(xy\neq yx)$ заменим на $\neg Z(x)$. При этом в f' остается лишь одно $\exists$,и всё доказано согласно 2.2. из § 2.

4. Пусть A - группа из I.9., а

$$G=\left[A x\prod\{b_{ij}\}x\prod\{c_i\}\right]\lambda\left[\prod\{b_j\}x\{c\}\right],$$

где $b_{ij}^p=c_i^p=1$, $a_i^{b_i}=a_i b_{ij}$, $a_i^c=a_i c_i$, $b_{ii}=1$, $P_{ii}\supset c_i=1$;

и $b_j^{p^2}=c^{p^3}$ при $p\neq 2$ и $b_j^8=c^{16}=1$ при $p=2$. При помощи описанных групп доказывается:

5. ЛЕММА 3. Класс метабелевых p-групп с тождеством $x^{p^3}=1$ при $p\neq 2$ и $x^{16}=1$ при $p=2$ удовлетворяет $(\forall^6\exists^{\infty})$.

6. СЛЕДСТВИЕ. Класс метабелевых групп удовлетворяет $(\forall^6\exists^{\infty})$.

§ 8. О других теориях

Несколько изменяя данные в [2] доказательства, можно получить:

ТЕОРЕМА 7. Пусть T - одна из следующих теорий:

а) теория частичного порядка;

б) теория структур, рассматриваемая как подтеория теории частично упорядоченных множеств (теории частичного порядка) или как теория соответствующих алгебр с двумя предикатами;

в) теория коммутативных 3-нильпотентных колец простой характеристики;

г) теория коммутативных колец с единицей.

T удовлетворяет $(\forall^{\tau}\exists^{\infty})$ для некоторого τ, зависящего от теории.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично теореме 5 можно показать, что для теории T частичного порядка множество $B(T)\cap\{P\}_{\forall^{3}\exists^{\infty}}$ рекурсивно.

Поступила в редакцию
24.IУ.1965 г.

Литература

I. Buchi I.R. Turing-Machines and the Entscheidungsproblem, Math Annalen, 148 (1962), 201-213.

2. Ю.Л.Ершов, И.А.Лавров, А.Д.Тайманов, М.А.Тайцлин. Алгоритмические вопросы теории моделей.-УМН (в печати).

3. А.И.Мальцев. Об одном соответствии между кольцами и группами.-Математический сборник, т. 50, (I960), 257-266.

4. A Tarski, A Mostowski and R Robenson, Undecidable Theories Amsterdam, 1953.

5. А. Черч. Введение в математическую логику.-ИЛ, М.,I960.