АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Институт математики

АЛГЕБРА и ЛОГИКА

Семинар

Сборник трудов

Том II
Выпуск I

Новосибирск
1963

А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

том II
выпуск I Руководитель А.И. Мальцев 1963 г.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ УПОРЯДОЧЕННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Ю.Ш. Гуревич и А.И. Кокорин

Замкнутая формула УИП, в пренексной форме не содержащая кванторов существования, называется $\forall$ -формулой.

Упорядоченные абелевы группы G_1 и G_2 называются $\forall$ -эквивалентными (соответственно, элементарно эквивалентными), если каждая замкнутая $\forall$ -формула (соот. формула) УИП, содержащая лишь предикаты, соответствующие групповой операции $+$, порядку $>$ и равенству $=$, истинная на одной из них, истинна на другой.

ТЕОРЕМА I. Упорядоченные абелевы группы $\forall$ -эквивалентны.

Доказательство проведем в несколько шагов, в которых будет применяться следующий частный случай леммы 2 из [I]:

Пусть M и N - модели одинаковой сигнатуры. Если для всякой конечной подмодели M_1 модели M существует изоморфная M_1 подмодель N_1 модели N, то из истинности $\forall$ -формулы α в N следует истинность α в M. Пусть M и N - упорядоченные абелевы группы.

Подмодели $M_1=\langle x_1,\dots,x_n\rangle\subset M$ и $N_1=\langle y_1,\dots,y_n\rangle\subset N$ являются изоморфными, если

a) $y_i=y_j \rightarrow x_i=x_j$,

в) $x_i=x_j \rightarrow y_i=y_j$,

c) $y_i<y_j \rightarrow x_i<x_j$,

d) $x_i<x_j \rightarrow y_i<y_j$,

e) $y_i+y_j=y_k \rightarrow x_i+x_j=x_k$,

f) $x_i+x_j=x_k \rightarrow y_i+y_j=y_k$.

I) Если $\forall$ -формула $\mathfrak{A}$ истинна на упорядоченной абелевой группе G, то $\mathfrak{A}$ истинна на аддитивной группе целых чисел Z с их естественным упорядочением.

Это следует из того, что упорядоченная абелева группа содержит подгруппу, изоморфную Z, единственности с точностью до обратного упорядочения Z и из истинности $\forall$ -формулы во всякой подмодели G.

2) Если $\forall$ -формула истинна в Z, то она истинна в аддитивной группе рациональных чисел R с их естественным упорядочением.

Это следует из того, что каждое конечное множество элементов из R лежит в подгруппе Z.

3) D_m - подгруппа аддитивной группы вещественных чисел с (с естественным упорядочением) с конечным числом m образующих. Тогда из истинности $\forall$ -формулы в R следует истинность ее в D_m.

Пусть $\langle y_1, \dots, y_n \rangle$ - подмодель D_m. Тогда y_i однозначно представим в виде

$$y = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_{i\nu} \alpha_\nu$$

где $\lambda_{i\nu}$ - целые числа;

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ - рационально независимые образующие D_m и $1 \le i \le n$.

Возьмем далее

$$x_i = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_{i\nu} r_\nu ,$$

где r_ν - рациональное число такое, что $|\alpha_\nu - r_\nu| < \varepsilon$

где

$$\varepsilon < \min_{y_i \ne y_j} \frac{|y_i - y_j|}{\sum_{\nu=1}^{m} |\lambda_{i\nu} - \lambda_{j\nu}|},$$

$$\varepsilon < \min_{y_i + y_j \ne y_k} \frac{|y_i + y_j - y_k|}{\sum^{m} |\lambda_{i\nu} + \lambda_{j\nu} - \lambda_{k\nu}|}$$

Докажем изоморфизм $\langle y_1, \dots, y_n \rangle$ и $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, то есть проверим указанные выше условия $a/-f/$. Условия $a), c)$ следуют из построения $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$. $b/$ и $c/$ следуют из (A), $d/$ следует из $a)$ и $c)$. f следует из (B). Покажем, например, f. Пусть $y_i + y_j \ne y_k$ и $x_i + x_j = x_k$. Тогда

$$|y_i + y_j - y_k| = |x_i + x_j - x_k + \sum (\lambda_{i\nu} + \lambda_{i\nu} - \lambda_{z\nu})(\alpha_\nu - r_\nu)| \le$$
$$\le \varepsilon \sum |\lambda_{i\nu} + \lambda_{j\nu} - \lambda_{k\nu}| < |y_i + y_j - y_k|$$

Получили противоречие.

4) K_S - упорядоченная абелева группа с конечным числом S образующих. Тогда из истинности $\forall$ -формулы $\mathfrak{A}$ в любой подгруппе с конечным числом образующих аддитивной группы вещественных чисел следует истинность ее в K_S.

На основании 2 $K_s = \mathcal{D}_{m_1} + \mathcal{D}_{m_2} + \ldots + \mathcal{D}_{m_t}$, где $\mathcal{D}_{m_i}$ изоморфна подгруппе аддитивной группы вещественных чисел с m_i образующими и порядок в K_s определяется так: $(d_1, \ldots, d_t) \geq (d_1', \ldots, d_t')$, если $d_t > d_t'$ при $d_t = d_t'$, если $d_{t-1} > d_{t-1}'$ и т.д.

Найдется такая подгруппа $\mathcal{D}_m$ аддитивной группы вещественных чисел, что каждая из $\mathcal{D}_{m_i}$ изоморфна некоторой подгруппе из $\mathcal{D}_m$.

Пусть $\langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ - подмодель K_s и $y_i = (\varepsilon_{i1}, \ldots, \varepsilon_{is})$ Возьмем подмодель $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ из $\mathcal{D}_m$

$$x_i = \sum^{s} \varepsilon_{i\nu} N^{\nu-1}$$

где N - целое число, удовлетворяющее условиям

$$\text{(C)} \qquad N > \max_{y_i \neq y_j} \frac{\sum_{\nu<\mu} |\varepsilon_{i\nu} - \varepsilon_{j\nu}|}{|\varepsilon_{i\mu} - \varepsilon_{j\mu}|}$$

где μ - наибольшее число из таких, что $\varepsilon_{i\mu} \neq \varepsilon_{j\mu}$.

(Д) N больше всякого корня всех уравнений относительно Z вида

$$\sum_1^s (\varepsilon_{i\nu} - \varepsilon_{j\nu}) Z^{\nu-1} = 0$$

$$\text{и} \qquad \sum_1^s (\varepsilon_{i\nu} + \varepsilon_{j\nu} - \varepsilon_{k\nu}) Z^{\nu-1} = 0$$

Докажем изоморфизм $\langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ и $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ Опять проверим условия $a) - f$. a и e непосредственно следуют из построения $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. b и f следуют из (Д). c следует из (С). d следует из a и c. Покажем, например, как c следует из (С). Пусть $y_i < y_j$ и μ - наибольшее число такое, что $\varepsilon_{i\mu} \neq \varepsilon_{j\mu}$. Тогда $\varepsilon_{j\mu} > \varepsilon_{i\mu}$ и $x_j - x_i =$

$$\sum (\varepsilon_{j\nu} - \varepsilon_{i\nu}) N^{\nu-1} = (\varepsilon_{j\mu} - \varepsilon_{i\mu}) N^{\mu-1} + \sum_{\nu<\mu} (\varepsilon_{j\nu} - \varepsilon_{i\nu}) N^{\nu-1} \geq$$

$$\geq |\varepsilon_{i\mu} - \varepsilon_{j\mu}| N^{\mu-1} - N^{\mu-2} \sum |\varepsilon_{i\nu} - \varepsilon_{j\nu}| \geq |\varepsilon_{i\mu} - \varepsilon_{j\mu}| N^{\mu-1} \left[1 - \frac{1}{N} \frac{\sum_{\nu<\mu} |\varepsilon_{i\nu} - \varepsilon_{j\nu}|}{|\varepsilon_{i\mu} - \varepsilon_{j\mu}|}\right] > 0$$

то есть $x_i < x_j$.

5) Пусть G - произвольная упорядоченная абелева группа. Если $\forall$ -формула $\mathfrak{A}$ истинна в каждой подгруппе G с конечным числом образующих, то $\mathfrak{A}$ истинна в G.

Из I), 2); 3), 4), 5) следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Абелевы группы без кручения $\forall$ -эквивалентны, то есть всякая $\forall$ -формула, содержащая лишь предикаты, соответствующие групповой операции $+$ и равенству $=$, истинная в одной абелевой группе без кручения, истинна и в другой.

Литература

I. Тайманов А.Д. Сб. "Алгебра и логика. Семинар", т.I, вып. 4, 5-3I (1962).
2. Зайцева М.И. УМН 8, вып. I (53) (1953), I35-I37.