DE AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM SYSTEMATE NON NORMALI AD FORMAM NORMALEM REVOCANDO

AUCTORE

C. G. J. JACOBI,
PROF. ORD. MATH. REGIOM.

DE AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM SYSTEMATE NON NORMALI AD FORMAM NORMALEM REVOCANDO*).

(Ex Ill. C. G. J. Jacobi manuscriptis posthumis in medium protulit A. Clebsch.)

In commentatione mea „Theoria novi Multiplicatoris etc." **) Multiplicatorem determinavi aequationum differentialium *isoperimetricarum*, i. e. ad problemata illa isoperimetrica pertinentium, in quibus variatio dati integralis, variabilem unam independentem, ceteras dependentes continentis, ad nihilum redigitur. Quam determinationem multo maioribus difficultatibus obnoxiam esse exposui, si variabilium dependentium differentialia altissima datum integrale afficientia non eiusdem ordinis sint. Eo enim casu aequationum differentialium isoperimetricarum systema non ea gaudet forma, ut singularum variabilium dependentium differentialia altissima pro incognitis haberi possint, quarum valores ipsis aequationibus differentialibus determinentur. Ad quam formam casu, quem innui, aequationes differentiales isoperimetricae post certas *tantum* differentiationes et eliminationes revocantur, id quod Multiplicatoris valorem indagandi negotium intricatum reddit.

Operae pretium duxi, totam materiem de aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocando accurate tractare. In qua disquisitione ad propositiones quasdam generales perveni, quae theoriae aequationum differentialium vulgarium lacunam quandam implere videntur, quarum summam hic breviter indicabo.

---

*) Alia Ill. Jacobi commentatio posthuma de eadem quaestione, demonstrationes regularum hic enuntiatarum continens, invenitur in Diarii mathematici vol. LXIV p. 297 (cf. h. vol. p. 191).

**) §§. 30—33 commentationis citatae, Diarii Crell. vol. XXIX sive h. ed. vol. IV p. 495 sqq.

§. 1.

Systematis m aequationum differentialium ordo et brevissima in formam normalem reductio determinantur per solutionem problematis, datum m^2 quantitatum schema quadraticum per numeros minimos $l_1, l_2, \ldots, l_m$ singulis horizontalibus addendos ita transformandi, ut m maximorum transversalium systemate praeditum evadat. Solutio exemplo illustratur.

Variabilem independentem vocemus t, eius functiones sive variabiles pro dependentibus habitas $x_1, x_2, \ldots, x_m$; inter quas variabiles propositae sint m aequationes differentiales

$$u_1 = 0, \; u_2 = 0, \; \ldots, \; u_m = 0.$$

Sit $a_{i,\varkappa}$ ordo altissimi, quod in aequatione $u_i = 0$ obvenit, differentialis variabilis $x_\varkappa$, dico:

1) ordinem systematis aequationum differentialium propositarum sive numerum Constantium arbitrariarum, quem earum integratio completa poscit, aequari *maximo* inter omnes valores, quos aggregatum

$$a_{i_1,1} + a_{i_2,2} + \cdots + a_{i_m,m}$$

induat, si pro indicibus $i_1, i_2, \ldots, i_m$, quibuscunque modis fieri potest, sumantur m diversi ex indicibus $1, 2, \ldots, m$.

Illud *maximum* sive systematis ordinem designabo per O; aequabitur O summae ordinum differentialium singularum variabilium altissimorum, quae obveniunt in systemate normali, ad quod propositum revocari potest. Ipse numerus O superabitur summa respectu systematis propositi aeque formata.

Variae exstant formae normales semperque certe duae, ad quas idem systema propositum reduci potest, quae reductiones non efficiuntur nisi auxilio diversarum differentiationum et eliminationum. Qua in re haec est propositio fundamentalis:

2) inter diversos modos aequationes differentiales propositas differentiandi, ut nascantur aequationes auxiliares, quarum adiumento per solas eliminationes systema propositum ad aliud normale reduci possit, *unicum* exstare *modum*, qui *paucissimas* differentiationes poscat, nam in alio quolibet modo aequationum differentialium propositarum aliquot vel omnes pluribus vicibus iteratis quam in illo differentiandas esse, neque in ullo alio modo fieri posse, ut aequationum differentialium propositarum una paucioribus vicibus differentietur.

Modum illum expeditissimum insigniamus nomine *brevissimae reductionis*, in qua brevissima reductione semper erunt aequationum differentialium propositarum una pluresve, quae omnino non differentiantur, sive quae nullas differentiationibus ex iis derivatas ad aequationum auxiliarium systema contribuunt. Unde si ponimus, in reductione brevissima ad aequationes auxiliares formandas aequationem $u_i = 0$ esse l_i vicibus iteratis differentiandam, e numeris integris non negativis

$$l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_m$$

semper unus pluresve nullitati aequantur. Ad eos numeros $l_1, l_2, \ldots, l_m$ investigandos, a quorum inventione reductio brevissima tota pendet, solvendum est hoc problema.

Problema.

„Datis m^2 quantitatibus $a_{i,x}$ quibuscunque, in quibus et i et x valores $1, 2, \ldots, m$ induere debent, investigare m quantitates *minimas* positivas seu evanescentes $l_1, l_2, \ldots, l_m$ ita comparatas, ut, posito $a_{i,x}+l_i = p_{i,x}$, inter m^2 quantitates $p_{i,x}$ eligere liceat m quantitates

$$p_{i_1,1},\ p_{i_2,2},\ \ldots,\ p_{i_m,m}$$

in seriebus diversis cum horizontalibus tum verticalibus positas, quarum unaquaeque inter eiusdem verticalis quantitates maximum valorem tueatur seu certe nulla alia quantitate eiusdem verticalis minor sit."

Solutio.

Solutionis problematis propositi momenta praecipua breviter innuam. Disponamus quantitates $a_{i,x}$ in schema quadraticum

$$(A)\quad \begin{cases} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,m}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,m}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, & \ldots, & a_{m,m}. \end{cases}$$

Si qua eius quadrati series horizontalis reprehenditur, cuius terminus nullus inter omnes eiusdem *verticalis* est maximus (quo nomine hic semper etiam comprehendo terminos nullo reliquorum minores), eius seriei horizontalis terminis omnibus eandem quantitatem addo positivam eamque minimam, pro qua unus eius terminus maximo eiusdem verticalis aequetur.

Post praeparationem indicatam si mutatur quadratum propositum (A) in hoc:

$$(B)\quad \begin{cases} b_{1,1}, & b_{1,2}, & \ldots, & b_{1,m}, \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & \ldots, & b_{2,m}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m,1}, & b_{m,2}, & \ldots, & b_{m,m}, \end{cases}$$

quadrati (B) nulla exstabit series horizontalis, in qua non insit terminus inter omnes eiusdem verticalis maximus. Ad eiusmodi quadratum sequentes denominationes refero, quae bene tenendae sunt.

Systema *maximorum transversalium* voco systema quantitatum $b_{i,\varkappa}$, quae cum in seriebus horizontalibus diversis tum in seriebus verticalibus diversis positae sunt, quarum unaquaeque inter omnes quantitates in eadem verticali positas *maxima* est.

Sumo in quadrato (B) maximum numerum maximorum transversalium, et, ubi pluribus modis idem numerus maximus maximorum transversalium prodit, unum eorum systema ex arbitrio eligo, eiusque terminos *asteriscis* noto. Quorum maximorum transversalium maximus numerus esse potest aut 2*) aut 3 etc. aut m; si eorum numerus est m, problema propositum solutum est. Si iste numerus ipso m minor est, id ago, ut serierum horizontalium quasdam numeris minimis talibus augeam, ut in novo quadrato proveniente numerus maximorum transversalium auctus inveniatur. Quo negotio repetito, tandem perveniatur ad quadratum necesse est, in quo maximorum transversalium numerus est m, quo reperto problematis solutio inventa est. Dico autem, *augeri seriem horizontalem*, si eius terminis omnibus eadem quantitas positiva additur.

Series horizontales et verticales, ad quas maximorum transversalium systema electum pertinet, voco series H et V, reliquas series horizontales et verticales voco series H' et V'. Terminos in una verticalium V' maximos et ipsos *asteriscis* noto. Terminos asteriscis notatos voco *maxima stellata*.

Ponamus, in serie horizontali h_1 esse maximum stellatum eique in eadem verticali aequari terminum in serie horizontali h_2 positum; in serie horizontali

*) Adhibita praeparatione, qua schema quadraticum (A) in schema (B) mutatum est, fit, ut 2 sit minimus valor huius numeri, qui valor tum occurrit, si omnia *maxima* in una eademque serie horizontali iacent atque insuper in una verticali termini omnes inter se aequales sunt. Vid. Diarium mathem. vol. LXIV, p. 312 sive h. vol. p. 208.

h_2 esse maximum stellatum eique in eadem verticali aequari terminum in horizontali h_3 positum etc.; si ea ratione ad seriem horizontalem h_α pervenitur, ubi h_α unam serierum $h_2, h_3, \ldots, h_m$ designat, dicam, *a serie h_1 ad seriem h_α transitum dari.* Si dicitur, a serie h_1 ad seriem h_α transitum dari, ipsa series h_1 omnesque intermediae $h_2, h_3, \ldots, h_{\alpha-1}$ ad series H pertinebunt; series h_α sive ad series H sive ad series H' pertinere potest. Si a nulla serie horizontali, in qua duo plurave maxima stellata insunt, transitus datur ad aliquam serierum H', et si nullus exstat serierum H' terminus in aliqua serierum V' maximus, id certo criterio est, maximorum transversalium numerum *maximum* electum fuisse.

His praemissis, series horizontales omnes in tres classes distribuo.

Ad *classem primam* serierum horizontalium refero eas series, in quibus inveniuntur *duo plurave* maxima stellata, neque minus series horizontales omnes, ad quas ab illis seriebus transitus datur; quarum serierum primae classis nulla ad series H' pertinebit.

Ad *classem secundam* serierum horizontalium refero eas serierum H ad classem primam non pertinentes, a quibus ad aliquam serierum H' transitus non datur.

Ad *classem tertiam* serierum horizontalium refero omnes series H' easque serierum H, a quibus ad series H' transitus datur.

Hac serierum horizontalium distributione facta, series ad tertiam classem pertinentes omnes eadem quantitate augeo eaque minima, qua addita fit, ut earum serierum terminorum unus aequalis evadat alicui eiusdem verticalis maximo stellato primae aut secundae classis. Si illud maximum stellatum pertinet ad seriem horizontalem classis secundae, haec in novo quadrato proveniente transmigrat ad classem tertiam, neque alia in serierum horizontalium distributione fit mutatio. Quo casu operatio iteranda est, nova serie e secunda classe in tertiam recepta, quae eo usque repetenda est, dum serierum tertiae classis terminus aliquis alicui maximo stellato seriei *primae* classis aequalis evadat. Id quod nisi antea certe tum necessario eveniet, cum series secundae classis omnes ad classem tertiam transmigraverint. Simulatque autem evenit, adepti sumus quadratum, in quo numerus maior maximorum transversalium quam in quadrato (B) invenitur. Tum nova maximorum stellatorum dispositione novaque serierum horizontalium distributione in tres classes facta, per eandem methodum novum quadratum formandum est, in quo rursus maximorum transversalium numerus auctus invenitur, idque eo usque continuandum est, dum perveniatur ad quadratum, in quo m maxima transversalia habentur. Quadratum sic inventum derivatum erit e proposito (A) addendo seriebus horizontalibus quam minimas quantitates positivas, quae ipsae erunt quantitates quaesitae $l_1, l_2, \ldots, l_m$.

Propter regulae complicationem unum saltem apponere exemplum iuvat, quod sequentibus schematis continetur:

(A)

	α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	$\varkappa$
a	14	23	1	5	73	$\underline{91}$	10	$\underline{34}$	5	$\underline{99}$
b	25	32	2	4	62	81	9	23	4	88
c	14	1	7	16	21	7	13	12	3	77
d	11	$\underline{53}$	$\underline{61}$	4	3	1	12	1	4	91
e	9	21	23	18	27	3	6	9	12	15
f	4	16	18	13	5	12	23	21	14	81
g	25	43	13	16	$\underline{83}$	10	$\underline{91}$	3	7	13
h	$\underline{27}$	7	17	$\underline{37}$	73	8	11	24	$\underline{23}$	22
i	25	12	18	27	32	18	24	23	14	88
k	16	28	30	25	34	10	13	16	19	42

Quadratum (A) est ipsum propositum, in cuius seriebus verticalibus sicuti in quadratorum derivatorum terminos maximos lineola subnotavi. Series horizontales elementis $a, b, \ldots, k$ designavi. Quarum b, c, e, f, i, k omnino nullos terminos subnotatos continent. Seriei b terminos ab earundem verticalium terminis subnotatis detrahendo eruuntur differentiae

$$2,\ 21,\ 59,\ 33,\ 21,\ 10,\ 82,\ 11,\ 19,\ 11,$$

quarum 2 est minima, unde seriem b quantitate 2 augeo. Seriei c termini ab earundem verticalium terminis subnotatis differunt quantitatibus

$$13,\ 52,\ 54,\ 21,\ 62,\ 84,\ 78,\ 22,\ 20,\ 22,$$

quarum cum 13 minima sit, seriem c quantitate 13 augeo. Simili ratione series e, f, i, k respective quantitatibus 11, 9, 2, 4 augendo quadratum (B) deduco, cuius originem designo per symbolum:

$$(B)\quad (a,\ b+2,\ c+13,\ d,\ e+11,\ f+9,\ g,\ h,\ i+2,\ k+4)$$

(B)

		V	V	V'	V	V'	V'	V	V'	V	V
I	a	14	23	1	5	73	$\underline{91}$*	10	$\underline{34}$*	5	$\underline{99}$*
III	b	$\underline{27}$*	34	4	6	64	83	11	25	6	90
III	c	$\underline{27}$	14	20	29	34	20	26	25	16	90
I	d	11	$\underline{53}$*	$\underline{61}$*	4	3	1	12	1	4	91
III	e	20	32	34	29	38	14	17	20	$\underline{23}$*	26
III	f	13	25	27	22	14	21	32	30	$\underline{23}$	90
I	g	25	43	13	16	$\underline{83}$*	10	$\underline{91}$*	3	7	13
II	h	$\underline{27}$	7	17	$\underline{37}$*	73	8	11	24	$\underline{23}$	22
III	i	$\underline{27}$	14	20	29	34	20	26	25	16	90
III	k	20	32	34	29	38	14	17	20	$\underline{23}$	46
			19	27	8	19	8	59	4		9

In quadrato (B) *sex* nec plura assignari possunt maxima transversalia; series verticales, in quibus posita sunt, suprascripta V, reliquas suprascripta V', ipsa maxima asteriscis noto. Si in aliqua verticalium V' terminus subnotatus reperitur, eundem asterisco noto. Seriebus horizontalibus a, d, g, in quibus bina plurave maxima stellata reperiuntur, classis I numerum praefigo. In septem verticalibus, ad quas maxima illa pertinent, nullus alius terminus subnotatus reperitur, unde a seriebus a, d, g ad aliam seriem transitus non datur, ideoque solae a, d, g primam classem constituunt. Series c, f, i, k, quippe in quibus omnino nullus reperitur terminus stellatus, ad classem III pertinent. Porro ad series f et k ab e, ad series c et i a b transitus datur, unde etiam series b et e ad tertiam classem pertinent. Scilicet ex definitione supra stabilita colligitur, ad seriem horizontalem s ab alia s_1 transitum dari, si in s sit terminus subnotatus non stellatus atque in eadem verticali terminus stellatus ad seriem horizontalem s_1 pertinens. Cum series a, d, g ad primam, series b, c, e, f, i, k ad tertiam classem pertineant, restat series h, quae secundam classem constituit. Iam in unaquaque serie verticali, in qua maximum stellatum inest ad seriem primae aut secundae classis pertinens, sumatur terminus serierum tertiae classis *proxime minor*, atque infra seriem verticalem notetur utriusque termini differentia. Quarum differentiarum

$$53-34=19,\quad 61-34=27,\quad 37-29=8,\quad 83-64=19,$$
$$91-83=8,\quad 91-32=59,\quad 34-30=4,\quad 99-90=9$$

sumatur minima 4; series tertiae classis omnes quantitate 4 augendo deducitur proximum quadratum (C). Quod quadratum per symbolum

$$(C)\quad (a,\ b+6,\ c+17,\ d,\ e+15,\ f+13,\ g,\ h,\ i+6,\ k+8)$$

denotari potest.

(C)

		V	V	V'	V	V'	V'	V	V	V	V
I	a	14	23	1	5	73	$\underline{91}^*$	10	$\underline{34}$	5	$\underline{99}^*$
III	b	$\underline{31}^*$	38	8	10	68	87	15	29	10	94
III	c	$\underline{31}$	18	24	33	38	24	30	29	20	94
I	d	11	$\underline{53}^*$	$\underline{61}^*$	4	3	1	12	1	4	91
III	e	24	36	38	33	42	18	21	24	$\underline{27}^*$	30
II	f	17	29	31	26	18	25	36	$\underline{34}^*$	$\underline{27}$	94
I	g	25	43	13	16	$\underline{83}^*$	10	$\underline{91}^*$	3	7	13
II	h	27	7	17	$\underline{37}^*$	73	8	11	24	23	22
III	i	$\underline{31}$	18	24	33	38	24	30	29	20	94
III	k	24	36	38	33	42	18	21	24	$\underline{27}$	50
			15	23	4	15	4	61	5		5

In quadrato (C) videmus, *septem* maxima transversalia reperiri, novumque in serie f accessisse terminum stellatum; ipsa f ad classem secundam a tertia transit. Subscribo quantitates, quibus in quadrato (C) termini stellati serierum primae et secundae classis terminos *proxime minores* ad tertiam classem et eandem verticalem pertinentes superant. Quarum quantitatum cum minima sit 4, series classis III omnes eodem numero 4 augendo formo quadratum

$$(D)\quad (a,b+10,c+21,d,e+19,f+13,g,h,i+10,k+12),$$

in quo iam *octo* maxima transversalia insunt.

(*D*)

		V	V	V'	V	V'	V	V	V	V	V
II	*a*	14	28	1	5	73	$\underline{91}$	10	$\underline{34}$	5	$\underline{99}$*
II	*b*	$\underline{35}$	42	12	14	72	$\underline{91}$*	19	33	14	98
III	*c*	$\underline{35}$*	22	28	$\underline{37}$	42	28	34	33	24	98
I	*d*	11	$\underline{53}$*	$\underline{61}$*	4	3	1	12	1	4	91
III	*e*	28	40	42	$\underline{37}$	46	22	25	28	$\underline{31}$*	34
II	*f*	17	29	31	26	18	25	36	$\underline{34}$*	27	94
I	*g*	25	43	13	16	$\underline{83}$*	10	$\underline{91}$*	8	7	13
III	*h*	27	7	17	$\underline{37}$*	73	8	11	24	23	22
III	*i*	$\underline{35}$	22	28	$\underline{37}$	42	28	34	33	24	98
III	*k*	28	40	42	$\underline{37}$	46	22	25	28	$\underline{31}$	54
			13	19		10	63	57	1		1

(*E*)

		V	V	V'	V	V'	V	V	V	V	V
III	*a*	14	23	1	5	73	$\underline{91}$	10	$\underline{34}$	5	$\underline{99}$*
III	*b*	35	42	12	14	72	$\underline{91}$*	19	33	14	98
III	*c*	$\underline{36}$*	23	29	$\underline{38}$	43	29	35	$\underline{34}$	25	$\underline{99}$
I	*d*	11	$\underline{53}$*	$\underline{61}$*	4	3	1	12	1	4	91
III	*e*	29	41	43	$\underline{38}$	47	23	26	29	$\underline{32}$*	35
III	*f*	17	29	31	26	18	25	36	$\underline{34}$*	27	94
I	*g*	25	43	13	16	$\underline{83}$*	10	$\underline{91}$*	3	7	13
III	*h*	28	8	18	$\underline{38}$*	74	9	12	25	24	23
III	*i*	$\underline{36}$	23	29	$\underline{38}$	43	29	35	$\underline{34}$	25	$\underline{99}$
III	*k*	29	41	43	$\underline{38}$	47	23	26	29	$\underline{32}$	55
			11	18		9		55			

Dispositio asteriscorum secundum regulas traditas in novo quadrato (*D*) paulo mutari debet; quo facto series a, b, h inveniuntur e classe I, III, II ad classem II, II, III transmigrasse. Termini stellati classis I et II terminos classis III atque earundem verticalium *proxime minores* superant numeris 13, 19, 10, 63, 57, 1, 1; quorum minimo 1 omnes classis III series augendo deduco quadratum

$$(E)\quad (a,\ b+10,\ c+22,\ d,\ e+20,\ f+13,\ g,\ h+1,\ i+11,\ k+13),$$

in quo *idem* est maximorum transversalium numerus.

Quadrati (E) habitus a quadrati (D) habitu non differt, nisi quod simul tres classis II series a, b, f ad classem III transierunt. Scilicet f et a ad classem III transeunt, quia earum terminis stellatis 34 et 99 aequales evadunt serierum i et c termini in iisdem verticalibus positi; deinde b et ipsa ad classem III transit, cum eius termino stellato 91 aequalis evadat terminus eiusdem verticalis in serie a, quae iam ad classem III transmigravit. De quadrato (E) per regulas traditas deducitur quadratum

$$(F)\quad (a+9,\ b+19,\ c+31,\ d,\ e+29,\ f+22,\ g,\ h+10,\ i+20,\ k+22),$$

in quo *novem* maxima transversalia insunt.

(F)

		V	V	V'	V	V	V	V	V	V	V
III	a	23	32	10	14	82	$\underline{100}$	19	$\underline{43}$	14	$\underline{108}^*$
III	b	44	51	21	23	81	$\underline{100}^*$	28	42	23	107
III	c	$\underline{45}^*$	32	38	$\underline{47}$	52	38	44	$\underline{43}$	34	$\underline{108}$
I	d	11	$\underline{53}^*$	$\underline{61}^*$	4	3	1	12	1	4	91
III	e	38	50	52	$\underline{47}$	56	32	35	38	$\underline{41}^*$	44
III	f	26	38	40	35	27	34	45	$\underline{43}^*$	36	103
II	g	25	43	13	16	$\underline{83}$	10	$\underline{91}^*$	3	7	13
II	h	37	17	27	$\underline{47}$	$\underline{83}^*$	18	21	34	33	32
III	i	$\underline{45}$	32	38	$\underline{47}^*$	52	38	44	$\underline{43}$	34	$\underline{108}$
III	k	38	50	52	$\underline{47}$	56	32	35	38	$\underline{41}$	64
			2	9		1		46			

E quadrato (F) deducitur quadratum

$$(G)\quad (a+10,\ b+20,\ c+32,\ d,\ e+30,\ f+23,\ g,\ h+10,\ i+21,\ k+23),$$

in quo et ipso *novem* maxima transversalia insunt; e (G) tandem provenit quadratum quaesitum

$$(H)\quad (a+11,\ b+21,\ c+33,\ d,\ e+31,\ f+24,\ g,\ h+11,\ i+22,\ k+24),$$

in quo *decem* maxima transversalia deprehenduntur, qui est ipse serierum horizontalium aut verticalium numerus.

(*G*)

		V	*V*	*V'*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
III	*a*	24	33	11	15	$\underline{83}$	$\underline{101}$	20	$\underline{44}$	15	$\underline{109}$*
III	*b*	45	52	22	24	82	$\underline{101}$*	29	43	24	108
III	*c*	$\underline{46}$*	33	39	$\underline{48}$	53	39	45	$\underline{44}$	35	$\underline{109}$
I	*d*	11	$\underline{58}$*	$\underline{61}$*	4	3	1	12	1	4	91
III	*e*	39	51	58	$\underline{48}$	57	33	36	39	$\underline{42}$*	45
III	*f*	27	39	41	36	28	35	46	$\underline{44}$*	37	104
II	*g*	25	43	13	16	$\underline{83}$	10	$\underline{91}$*	3	7	13
III	*h*	37	17	27	47	$\underline{83}$*	18	21	34	33	82
III	*i*	$\underline{46}$	33	39	$\underline{48}$*	53	39	45	$\underline{44}$	35	$\underline{109}$
III	*k*	39	51	53	$\underline{48}$	57	33	36	39	$\underline{42}$	65
			1	8				45			

(*H*)

		α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	$\varkappa$
S_3	*a*	25	34	12	16	$\underline{84}$	$\underline{102}$*	21	$\underline{45}$	16	$\underline{110}$
S_2	*b*	46	$\underline{53}$*	23	25	83	$\underline{102}$	30	44	25	109
S_5	*c*	$\underline{47}$*	34	40	$\underline{49}$	54	40	46	$\underline{45}$	36	$\underline{110}$
S_1	*d*	11	$\underline{53}$	$\underline{61}$*	4	3	1	12	1	4	91
S_6	*e*	40	52	54	$\underline{49}$	58	34	37	40	$\underline{43}$*	46
S_4	*f*	28	40	42	37	29	36	47	$\underline{45}$*	38	105
S_1	*g*	25	43	13	16	83	10	$\underline{91}$*	3	7	13
S_4	*h*	38	18	28	48	$\underline{84}$*	19	22	35	34	33
S_4	*i*	$\underline{47}$	34	40	$\underline{49}$	54	40	46	$\underline{45}$	36	$\underline{110}$*
S_5	*k*	40	52	54	$\underline{49}$*	58	34	37	40	$\underline{43}$	66

Quadrati (H)*) repraesentatio symbolica docet, esse

$$11,\ 21,\ 33,\ 0,\ 31,\ 24,\ 0,\ 11,\ 22,\ 24$$

minimos numeros quadrati propositi (A) seriebus addendos, ut aliud nascatur quadratum, in quo termini in diversis seriebus verticalibus maximi omnes ad diversas series horizontales pertineant, neque ullum eiusmodi quadratum ex (A) deduci posse vel uni serierum horizontalium numerum minorem addendo quam assignatum.

Si numerus quantitatum, e quibus quadrata conflantur, permagnus est, non difficile erit artificia comminisci, quibus numeros scribendi taedium evitetur, quippe e quorum magna mole pauci tantum ad unumquodque novum quadratum formandum poscantur.

§. 2.

Regula exponitur ad inveniendos numeros minimos $l_1, l_2, \ldots, l_m$, dato quocunque eorum numerorum systemate, aut datis tantum schematis quadratici terminis, qui post numerorum $l_1, l_2, \ldots, l_m$ additionem m maxima transversalia praebent. Exemplum regulae adiicitur.

Sint rursus l_i quantitates positivae seu evanescentes, positoque

$$a_{i,x}+l_i = p_{i,x},$$

quadratum

$$\begin{array}{cccc} p_{1,1}, & p_{1,2}, & \ldots, & p_{1,m}, \\ p_{2,1}, & p_{2,2}, & \ldots, & p_{2,m}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{m,1}, & p_{m,2}, & \ldots, & p_{m,m} \end{array}$$

ita comparatum sit, ut termini in diversis eius seriebus verticalibus maximi omnes ad diversas quoque series horizontales pertineant, sive ut in eo unum plurave maximorum transversalium systemata completa**) assignari possint. Quorum unum quodcunque asteriscis distinguendo, reliqua vero singularum verticalium maxima iis aequalia lineolis subnotando, habetur hoc criterium certum,

*) signorum S_1, S_2 etc. in tabula quadrati (H) adhibitorum explicatio in sequenti paragrapho praestabitur.

**) i. e. ex m terminis composita.

quo cognosci potest, sitne eiusmodi quadratum e dato (A), quod quantitatibus $a_{i,x}$ formatur, per *minimas* quantitates positivas seu evanescentes l_i seriebus horizontalibus additas derivatum. Sumantur enim series horizontales, pro quibus $l_i = 0$ seu quae omnino eaedem sunt atque in quadrato proposito (A). Quas series, quarum certe una exstare debet, per S_1 designabo. In seriebus S_1 sumantur termini subnotati atque in horum verticalibus termini stellati, quorum series horizontales, quae non iam forte ad ipsas S_1 pertinent, designo per S_2. Rursus in seriebus verticalibus, ad quas serierum S_2 termini subnotati pertinent, sumantur termini stellati, quorum series horizontales et a S_1 et a S_2 diversas per S_3 denoto. *Si ea ratione pergendo series horizontales omnes exhauriuntur, quadratum e quantitatibus $p_{i,x}$ formatum de quadrato proposito, e quantitatibus $a_{i,x}$ formato, per minimas quantitates positivas seu evanescentes l_i seriebus eius horizontalibus additas deductum est.* Ita in exemplo nostro *omnes* series horizontales ad systemata S_1, S_2 etc. successive inventa sequenti modo referuntur:

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
d	b	a	f	c	e
g			h	k	
			i		

Unde certo concludi potest, in exemplo nostro ad eruendam problematis propositi solutionem quantitates seriebus horizontalibus addendas quam minimas adhibitas esse.

Iisdem principiis, quibus erutum est criterium, sitne problema modo simplicissimo sive per quantitates quam minimas l_i solutum, etiam nititur methodus, qua solutio simplicissima de solutione quacunque deduci potest. Statuendo

$$a_{i,x} + h_i = q_{i,x},$$

ubi quantitates h_i sint positivae aut evanescentes, formatoque quadrato e quantitatibus $q_{i,x}$ ad instar quadrati (A) e quantitatibus $a_{i,x}$ formati, ponamus, in seriebus eius verticalibus diversis assignari posse maxima, quae omnia in diversis quoque seriebus horizontalibus posita sint. Eiusmodi maximorum transversalium systema completum quodcunque asteriscis noto. Quantitatum h_i minima, quam h vocabo, de omnibus $q_{i,x}$ detracta, prodit quadratum, cuius series horizontales una pluresve immutatae, i. e. eaedem sunt atque in quadrato (A), quas series rursus per S_1 denoto. Deinde terminis praeter ipsos stellatos in suis verticalibus maximis lineola subnotatis, lege supra exposita de seriebus S_1 successive serierum horizontalium systemata deducantur $S_2, S_3, \ldots, S_\alpha$. Quibus si omnes series horizontales amplectimur, solutio simplicissima inventa est; sin autem relinquuntur series horizontales, in quibus nullus datur terminus stellatus, qui cum aliquo termino subnotato serierum $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$ in eadem verticali positus sit, de omnibus illis seriebus horizontalibus detraho eandem quantitatem minimam h' talem, ut aut earum terminus aliquis stellatus termino alicui eiusdem verticalis ad unam serierum $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$ pertinenti aequalis evadat, aut earum una in seriem quadrati (A) correspondentem redeat. Quare serierum horizontalium ad complexus $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$ pertinentium numerus maior factus erit quam in quadrato e quantitatibus $q_{i,x} - h$ formato. Eadem procedendi ratione, si opus est, continuata, pauciores paucioresque series horizontales relinquentur e complexibus $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$ exclusae, donec perveniatur ad quadratum, in quo serierum $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$ systemata *omnes* series horizontales amplectuntur.

Si quantitatibus quibuscunque $h_1, h_2, \ldots, h_m$ ad series quadrati (A) horizontales additis deducitur quadratum m maximis transversalibus gaudens, summa terminorum, qui eadem loca in quadrato (A) atque illa maxima transversalia in quadrato derivato occupant, inter omnia quadrati (A) aggregata m terminorum transversalium valore maximo gaudet. Unde problema inaequalitatum,

> dati quadrati (A) e m^2 terminis formati invenire m terminos transversales summa *maxima* gaudentes,

tot habebit solutiones, quot in quadrato derivato assignari possunt maximorum transversalium systemata. Quae systemata omnia inveniuntur, si quadrati derivati terminos tantum conservamus in suis verticalibus maximos, reliquos omnes *nullitati* aequiparamus, deinde eorum terminorum formamus Determinans. Quippe cuius Determinantis termini singuli singulas problematis solutiones suppeditant. Vice versa demonstrari potest, unamquamque problematis inaequalitatum antecedentis solutionem suppeditare quadrati derivati systema maximorum transversalium.

In exemplo nostro e quadrati (H) terminis subnotatis formandum erit Determinans, reliquis quadrati (H) terminis nullitati aequiparatis. Quod Determinans successive revocari potest ad Determinantia simpliciora formata e quantitatibus quadratorum

(I)

	α	β	δ	ζ	ι	$\varkappa$
a				102		110
b		53		102		
c	47		49			110
e			49		43	
i	47		49			110
k			49		43	

(II)

	α	δ	ζ	ι	$\varkappa$
a			102		110
c	47	49			110
e		49		43	
i	47	49			110
k		49		43	

(III)

	α	δ	ι	$\varkappa$
c	47	49		110
e		49	43	
i	47	49		110
k		49	43	

Designemus enim quadrati terminos per serierum horizontalium et verticalium, ad quas pertinent, indicationem, quarum illas elementis a, b, c etc., has elementis α, β, γ etc. notavi. In quadrato (H) termini (d, γ), (g, η) sunt in suis verticalibus unici subnotati, termini (f, ϑ), (g, η), (h, ε) in suis seriebus horizontalibus unici subnotati. Unde Determinantis formandi termini omnes habere debent factorem communem

$$(d, \gamma)(h, \varepsilon)(g, \eta)(f, \vartheta).$$

Quo factore reiecto, remanet Determinans e quantitatibus quadrati (I), quod seriebus horizontalibus d, f, g, h, verticalibus γ, ε, η, ϑ reiectis e quadrato (H) nascitur. In eo quadrato terminus (b, β) in sua verticali unicus est non evanescens, quo et ipso ut factore communi separato, quaerendum manet Determinans quantitatum quadrati (II). In quo quadrato rursus termino (a, ζ), in sua verticali unico, ut factore communi separato, formandum manet quantitatum (III) Determinans

$$\begin{aligned} & -(c, \alpha)(e, \delta)(k, \iota)(i, \varkappa) - (i, \alpha)(k, \delta)(e, \iota)(c, \varkappa) \\ & +(c, \alpha)(k, \delta)(e, \iota)(i, \varkappa) + (i, \alpha)(e, \delta)(k, \iota)(c, \varkappa) \\ = & -\{(c, \alpha)(i, \varkappa) - (i, \alpha)(c, \varkappa)\}\{(e, \delta)(k, \iota) - (k, \delta)(e, \iota)\}. \end{aligned}$$

Quod cum quatuor terminis constet, in quadrato proposito (A) quatuor habentur systemata maximorum transversalium summa maxima gaudentium, videlicet

$$(b,\ \beta)+(d,\ \gamma)+(h,\ \varepsilon)+(a,\ \zeta)+(g,\ \eta)+(f,\ \vartheta)$$
$$+1)\ (c,\ \alpha)+(e,\ \delta)+(k,\ \iota)+(i,\ \varkappa)$$
$$\text{aut } 2)\ (c,\ \alpha)+(k,\ \delta)+(e,\ \iota)+(i,\ \varkappa)$$
$$\text{aut } 3)\ (i,\ \alpha)+(k,\ \delta)+(e,\ \iota)+(c,\ \varkappa)$$
$$\text{aut } 4)\ (i,\ \alpha)+(e,\ \delta)+(k,\ \iota)+(c,\ \varkappa).$$

Qui in exemplo nostro numeris expressi sunt

$$32+61+73+91+91+21 = 369$$
$$+1)\ 14+18+19+88 = 139$$
$$\text{aut } 2)\ 14+25+12+88 = 139$$
$$\text{aut } 3)\ 25+25+12+77 = 139$$
$$\text{aut } 4)\ 25+18+19+77 = 139,$$

unde terminorum transversalium aggregatum maximum fit 508.

Vice versa, si undecunque cognoscuntur quadrati propositi (A) termini transversales summa maxima gaudentes, sequenti ratione e quadrato proposito (A) per quantitates minimas l_i seriebus horizontalibus addendas derivatur quadratum, in quo diversarum verticalium maxima omnia in diversis quoque seriebus horizontalibus iacent.

Datos scilicet terminos transversales summa maxima gaudentes asteriscis noto, et seriebus horizontalibus tales quantitates addo, ut termini earum stellati maximis in ipsorum seriebus verticalibus aequentur. Unamqamque seriem auctam reliquis seriebus subscribo eamque in reliquarum serierum et antecedentium et sequentium examine adhibeo. Qua in re series horizontales elementis a, b etc. denotatas iisdem elementis post augmenta capta designo, atque terminis stellatis post augmenta capta asteriscos conservo. Procedendi rationem exemplo nostro sequens schema illustrabit. Dati supponantur termini transversales summa maxima gaudentes

$(a,\ \zeta)$,	$(b,\ \beta)$,	$(c,\ \alpha)$,	$(d,\ \gamma)$,	$(e,\ \delta)$,	$(f,\ \vartheta)$,	$(g,\ \eta)$,	$(h,\ \varepsilon)$,	$(i,\ \varkappa)$,	$(k,\ \iota)$
91	32	14	61	18	21	91	73	88	19.

		α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	$\varkappa$
(1)	a	14	23	1	5	73	91*	10	34	5	99
(2)	b	25	32*	2	4	62	81	9	23	4	88
(3)	c	14*	1	7	16	21	7	13	12	3	77
(4)	d	11	53	61*	4	3	1	12	1	4	91
(5)	e	9	21	23	18*	27	3	6	9	12	15
(6)	f	4	16	18	13	5	12	23	21*	14	81
(7)	g	25	43	13	16	83	10	91*	3	7	13
(8)	h	27	7	17	37	73*	8	11	24	23	22
(9)	i	25	12	18	27	32	18	24	23	14	88*
(10)	k	16	28	30	25	34	10	13	16	19*	42
(11)	b	46	53*	23	25	83	102	30	44	25	109
(12)	a	25	34	12	16	84	102*	21	45	16	110
(13)	c	46*	33	39	48	53	39	45	44	35	109
(14)	e	39	51	53	48*	57	33	36	39	42	45
(15)	f	28	40	42	37	29	36	47	45*	38	105
(16)	h	38	18	28	48	84*	19	22	35	34	33
(17)	i	47	34	40	49	54	40	46	45	36	110*
(18)	c	47*	34	40	49	54	40	46	45	36	110
(19)	e	40	52	54	49*	58	34	37	40	43	46
(20)	k	40	52	54	49	58	34	37	40	43*	66

In verticali ζ terminus stellatus ipse est maximus, unde ab initio certe series horizontalis a non mutatur; in verticali β est maximus 53, unde horizontalis b numero 21 augenda auctaque subscribenda est, quo linea (11) formatur. Iam ad primum terminum regressi, in serie ζ invenimus maximum 102, unde a numero 11 augenda est, quod lineam (12) suppeditat. Ad terminum (c, α) progredientes, in α invenimus maximum 46 in linea (11) positum, unde c numero 32 augenda est, quod lineam (13) suppeditat. Eadem ratione series d et g immutatas relinquo, series e, f, h, i numeris 30, 24, 11, 22 augeo, quod lineas (14), (15), (16), (17) suppeditat. Iam cum in linea (17) inveniatur verticalis α terminus 47, eiusdem verticalis termino stellato 46 in linea (13) posito maior, lineae (13) addo 1, unde linea (18) formatur. In (17) et (18) est verticalis δ terminus 49 eiusdem verticalis termino stellato in (14) posito maior, unde lineam (14) et ipsam unitate augeo, quod lineam (19) suppeditat. Denique ad terminum $(k, \iota) = 19$ procedo; et cum verticalis ι sit maximum 43 in (19) positum, seriei k addendo 24, formo lineam (20). Quo facto iam negotium transactum erit. Inventae enim sunt series

$$\begin{array}{lcccccccccc} & a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & i, & k, \\ \text{lineas} & (12), & (11), & (18), & (4), & (19), & (15), & (7), & (16), & (17), & (20). \end{array}$$

formantes, quarum stellati termini in ipsorum verticalibus maximi sunt, quod requirebatur. Quas series videmus constituere quadratum (H) supra alia methodo inventum.

Antecedentium ope novam nanciscimur solutionem problematis supra propositi, si innotuerint quantitates m quaecunque, quae seriebus quadrati (A) horizontalibus additae hoc quadratum in aliud transforment, cuius termini in diversis verticalibus maximi omnes ad diversas series horizontales pertineant, invenire illarum m quantitatum valores minimos positivos seu evanescentes. Nam cum secundum suppositionem factam aliquod innotescat quadratum ex (A) derivatum m maximis transversalibus gaudens, etiam in (A) innotescunt m termini transversales summa maxima gaudentes. Quibus cognitis, secundum regulam in antecedentibus traditam facile per quantitates minimas positivas addendas ex (A) derivatur quadratum m maximis transversalibus gaudens. Simul patet, quomodo, uno cognito systemate terminorum quadrati (A) transversalium summa maxima gaudentium, reliqua omnia systemata facile inveniantur. Nam uno illo systemate cognito, vidimus, facile ex (A) derivari quadratum systemate m maximorum transversalium gaudens; in quo si singularum verticalium sola maxima conservantur, reliquis terminis nihilo aequiparatis, Determinantis e quadrati quantitatibus formati singuli termini non evanescentes suggerunt singula maximorum transversalium systemata ideoque singula systemata terminorum quadrati (A) transversalium summa maxima gaudentium; amborum enim systematum termini in duobus quadratis eadem loca occupant.

§. 3.

Solutio problematis de schemate quadratico m^2 quantitatum ad systema m aequationum differentialium applicatur. Forma aut formae normales, ad quas systema propositum per reductionem brevissimam revocari possit. Aliae reductiones in formam normalem.

Aequationes differentiales propositae

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_m = 0,$$

ut per brevissimam reductionem ad alias forma normali gaudentes revocentur, $l_1, l_2, \ldots, l_m$ vicibus differentiandae sunt. Numeri $l_1, l_2, \ldots, l_m$ ipsi sunt, quorum in antecedentibus tradidi inventionem. Qui cum omnino determinati sint, etiam systema aequationum auxiliarium ad reductionem brevissimam requisitum, quod illis differentiationibus nascitur, omnino determinatum erit. At plerumque variae sunt formae normales, ad quas aequationes differentiales propositae illius aequationum auxiliarium systematis ope revocari possunt. Sit enim rursus $a_{i,\varkappa}$ ordo differentialis variabilis $x_\varkappa$ altissimi, quod in aequatione $u_i = 0$ reperitur, atque rursus quantitates $a_{i,\varkappa}$ in formam quadrati (A) disponantur, cuius i^{tam} seriem horizontalem constituunt termini $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,m}$, $\varkappa^{\text{tam}}$ verticalem termini $a_{1,\varkappa}, a_{2,\varkappa}, \ldots, a_{m,\varkappa}$. Sumatur in quadrato (A) aliquod systema terminorum transversalium summa maxima gaudentium

$$a_{a_1,1}, \quad a_{a_2,2}, \quad \ldots, \quad a_{a_m,m},$$

aequationes differentiales propositae per brevissimam reductionem ad has revocari possunt forma normali gaudentes

$$x_1^{(a_{a_1,1})} = X_1, \quad x_2^{(a_{a_2,2})} = X_2, \quad \ldots, \quad x_m^{(a_{a_m,m})} = X_m,$$

ubi diversarum variabilium differentialia ad laevam posita sunt altissima, quae in systemate reducto reperiuntur, a quibus functiones ad dextram positae $X_1, X_2 \ldots, X_m$ prorsus vacuae supponantur. Atque habebuntur tot eiusmodi systemata inter se diversa aequationum differentialium, ad quas aequationes differentiales propositae per brevissimam reductionem revocari possint, quot in quadrato (A) habentur systemata terminorum transversalium summa maxima gaudentium. Conditis aequationibus auxiliaribus ad brevissimam reductionem adhibendis, ponamus, variabilis $x_\varkappa$ differentiale altissimum sive in aequationibus propositis $u_i = 0$, $u_{i_1} = 0$ etc. sive in aequationibus auxiliaribus ex his per iteratas differentiationes derivatis reperiri; in iis locis quadrati, quae ad $\varkappa^{\text{tam}}$ seriem verticalem atque ad i^{tam}, i_1^{tam} etc. seriem horizontalem pertinent, colloco unitatem sive aliam quantitatem non evanescentem, in reliquis autem $\varkappa^{\text{tae}}$ verticalis loculis colloco nullitatem.

Quo facto, pro singulis variabilibus $x_\varkappa$ terminorum quadrati formo Determinans. Cuius terminus non evanescens si conflatur e quantitatibus primae, secundae, ..., m^{tae} verticalis, ad α_1^{tam}, α_2^{tam}, ..., α_m^{tam} seriem horizontalem pertinentis, dabitur forma normalis, in qua variabilium $x_1, x_2, \ldots, x_m$ altissima differentialia respective eadem sunt atque in aequationibus propositis

$$u_{\alpha_1} = 0, \quad u_{\alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad u_{\alpha_m} = 0.$$

Cum ad alios Determinantis terminos alius pertineat indicum $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ordo, ea ratione e Determinantis terminis non evanescentibus singulis singulae prodeunt formae normales, ad quas aequationes differentiales propositae per brevissimam reductionem revocari possunt.

Vidimus, methodum, qua per quantitates minimas positivas seriebus horizontalibus addendas ex (A) deducatur quadratum, in quo verticalium maxima omnia in diversis seriebus horizontalibus reperiantur, magis expeditam reddi posse, si undecunque cognosceretur quadrati (A) systema m terminorum transversalium summa maxima gaudentium. Hac methodo expeditiore invenitur, quot vicibus iteratis in reductione brevissima singulae aequationes propositae ad formandas aequationes auxiliares differentiandae sint, quoties undecunque datur forma aliqua normalis, ad quam aequationes differentiales propositae tali reductione revocantur. Quae forma normalis innotescit, si aequationes differentiales propositae ita comparatae sunt, ut in aliis aliarum variabilium differentialia ad altissimum ordinem ascendant. Tum enim illa diversarum variabilium differentialia in diversis aequationibus propositis altissima ipsa altissima erunt in forma normali, ad quam aequationes differentiales propositae brevissima reductione revocari possunt. Namque illorum differentialium ordinis in quadrato (A) constituunt m terminorum transversalium systema.

Ut huius paragraphi disquisitiones exemplo illustrentur, ponamus, dari *decem* aequationes differentiales $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, ..., $u_{10} = 0$ inter variabilem independentem t et decem dependentes $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, atque numeros quadrati (A) p. 490 propositi indicare ordines altissimos, ad quos singularum variabilium dependentium differentialia in diversis aequationibus ascendant, ita ut ex. gr. altissima variabilium $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ differentialia in aequatione $u_1 = 0$ occurrentia sint

$$x_1^{(14)}, \quad x_2^{(23)}, \quad x_3^{(1)}, \quad x_4^{(5)}, \quad x_5^{(73)}, \quad x_6^{(91)}, \quad x_7^{(10)}, \quad x_8^{(34)}, \quad x_9^{(5)}, \quad x_{10}^{(99)}.$$

Cum ultimum quadratum (H) ex proposito (A) deductum sit addendo seriebus horizontalibus numeros

$$11,\ 21,\ 33,\ 0,\ 31,\ 24,\ 0,\ 11,\ 22,\ 24,$$

reductio brevissima perficitur per aequationes auxiliares formatas differentiando aequationes propositas

$$\begin{array}{cccccccc} u_1 = 0, & u_2 = 0, & u_3 = 0, & u_5 = 0, & u_6 = 0, & u_8 = 0, & u_9 = 0, & u_{10} = 0 \\ 11, & 21, & 33, & 31, & 24, & 11, & 22, & 24 \end{array}$$

vicibus iteratis, aequationibus duabus $u_4 = 0$, $u_7 = 0$ omnino non ad formandas aequationes auxiliares advocatis. Earumque aequationum auxiliarium ope propositae per solas eliminationes ad *quatuor* diversas formas normales revocari possunt. In quibus omnibus inter altissima diversarum variabilium differentialia, quae per inferiora ipsasque variabiles exprimenda sunt, secundam ea, quae supra tradidi, inveniuntur

$$x_2^{(32)},\ x_3^{(61)},\ x_5^{(73)},\ x_6^{(91)},\ x_7^{(91)},\ x_8^{(21)};$$

porro in forma normali

$$\begin{array}{rcccc} \textit{prima:} & x_1^{(14)}, & x_4^{(18)}, & x_9^{(19)}, & x_{10}^{(88)}; \\ \textit{secunda:} & x_1^{(14)}, & x_4^{(25)}, & x_9^{(12)}, & x_{10}^{(88)}; \\ \textit{tertia:} & x_1^{(25)}, & x_4^{(25)}, & x_9^{(12)}, & x_{10}^{(77)}; \\ \textit{quarta:} & x_1^{(25)}, & x_4^{(18)}, & x_9^{(19)}, & x_{10}^{(77)}. \end{array}$$

Unde decem illarum aequationum differentialium propositarum integratio completa 508 Constantibus arbitrariis afficitur, qui numerus est summa ordinum, ad quos altissima diversarum variabilium differentialia in formis normalibus ascendunt. Altissima illa formarum normalium differentialia omnia in ipsis aequationibus differentialibus propositis reperiuntur, neque vero in his altissima sunt praeter $x_3^{(61)}$, $x_6^{(91)}$, $x_7^{(91)}$.

Consideremus reductionem quamcunque atque e toto aequationum differentialium propositarum et auxiliarium numero eligamus m, quae ex singulis aequationibus propositis per altissimam differentiationem derivatae sint, inter quas nonnullae ex propositarum numero esse possunt, si quae earum ad aequationes auxiliares per differentiationes formandas omnino non in usum vocatae sunt. In unaquaque earum m aequationum colligamus altissimorum singularum variabilium differentialium ordines eosque more consueto in quadratum disponamus: in eiusmodi quadrato necessario maxima diversarum serierum verticalium omnia in diversis quoque seriebus horizontalibus versantur. Ex praeceptis autem supra traditis de eiusmodi quadrato redire licet ad aliud de proposito (A) per minimos numeros positivos l_i deductum. Unde colligitur, *de aequationum diffe-*

rentialium propositarum quacunque reductione in formam normalem deduci posse brevissimam.

§. 4.

Reductio systematis propositi ad unicam aequationem differentialem. Regula ad reductionem inveniendam datur et exemplo illustratur. Forma elegans, qua regulam enuntiare liceat.

Aequationum differentialium systema in genere ad unicam aequationem differentialem inter duas variabiles revocari potest. Sint duae illae variabiles independens t et dependens x_1; uni illi aequationi differentiali inter t et x_1 intercedenti iungi debent aliae aequationes, quibus reliquae variabiles dependentes $x_2, x_3, \ldots, x_m$ ipsae per t, x_1 atque variabilis x_1 differentialia exprimantur, quae differentialia non ascendunt ad ordinem aequationis differentialis inter t et x_1 locum habentis. Eiusmodi forma normalis cum prae ceteris ab Analystis considerari soleat, indicabo, quot vicibus iteratis singulae aequationes differentiales propositae $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\ldots$, $u_m = 0$ differentiandae sint, ut aequationes differentiales ad reductionem illam necessariae nascantur.

Aequationes differentiales propositas $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\ldots$, $u_m = 0$ ponamus $l_1, l_2, \ldots, l_m$ vicibus differentiandas esse, ut aequationes auxiliares ad reductionem brevissimam requisitae prodeant. Qui numeri $l_1, l_2, \ldots, l_m$ quomodo inveniantur, supra praecepi. Quadrati (A) seriebus horizontalibus addendo numeros $l_1, l_2, \ldots, l_m$, alterum formo quadratum (A'), in eoque aliquod maximorum transversalium systema completum asteriscis distinguo, reliqua diversarum verticalium maxima lineolis subnoto. Si variabiles omnes praeter independentem t et dependentem $x_\varkappa$ eliminandae sunt, in $\varkappa^{\text{ta}}$ verticali quaero terminum stellatum, qui sit in i^{ta} serie horizontali; in i^{ta} serie horizontali quaero terminos subnotatos, in eorum verticalibus singulis singulos terminos stellatos, in horum seriebus horizontalibus rursus terminos subnotatos, in eorum verticalibus rursus terminos stellatos et ita porro. Qua in re ad terminos stellatos iam notatos amplius recurrere non opus est. Continuato negotio, quantum fieri potest, omnes series horizontales, ad quas ea procedendi ratione pervenitur, i^{tae}, a qua auspicati sumus, dicam *annexas*. Quas series una cum ipsa i^{ta} omnes minima quantitate augeo tali, ut earum terminus aliquis neque stellatus neque subnotatus aequalis evadat termino suae verticalis stellato. Cuius termini serie horizontali accedente ad series i^{tae} annexas, rursus i^{tam} seriem eique annexas, quarum iam auctus est numerus, quantitate minima augeo tali, ut earum terminus aliquis neque stellatus neque subnotatus aequalis evadat termino suae verticalis stellato; quo facto, serierum i^{tae} annexarum numerus rursus augebitur; et sic harum serierum numerum magis magisque augeo, donec perveniatur ad quadratum (A''), cuius omnes series horizontales i^{tae} annexae sunt. Iam ex (A'') quadratum (A''') deduco, augendo series horizontales eadem quantitate tali, ut terminus ad i^{tam} seriem horizontalem, $\varkappa^{tam}$ verticalem pertinens fiat aequalis *summae maximae, quam systema m terminorum transversalium quadrati* (A) *induere potest.* Numeri, quibus quadrati (A) series horizontales augendae sunt, ut quadratum (A''') efficiatur, indicant, quot vicibus singulae aequationes differentiales propositae differentiandae sint ad aequationes eruendas auxiliares necessarias, ut per solas eliminationes nascantur aequatio differentialis inter solas variabiles t et $x_\varkappa$ aliaeque aequationes, quibus reliquae variabiles ipsae per t, $x_\varkappa$ et variabilis $x_\varkappa$ differentialia exprimantur.

Quadratum (A') est idem, quod supra in exemplo nostro per (H) designavi. Ponamus, $\varkappa^{tam}$ verticalem esse seriem ζ, cuius terminus stellatus 102 ad seriem horizontalem a pertinet, in qua insunt termini subnotati 84, 45, 110, ad verticales ε, ϑ, $\varkappa$ pertinentes, quarum termini stellati ad series h, f, i pertinent, in quibus habentur termini subnotati 47 et 49, ad verticales α et δ pertinentes (45 non adhibeo, quippe cuius verticalem iam in usum vocavimus); in verticalibus α et δ termini stellati ad series c et k pertinent, in qua posteriore habetur terminus subnotatus 43, ad verticalem ι pertinens, cuius terminus stellatus in e iacet, quae series unicum subnotatum 49 continet, cuius verticalis iam in usum vocata est. Hinc seriei a inventae sunt annexae h, f, i, c, k, e. Series a, h, f, i, c, k, e omnes *unitate* augendo seriebus ipsi a annexis accedit b; nam eo incremento seriei e vel k terminus 52, ad verticalem β pertinens, abit in 53, qui numerus aequatur termino verticalis β stellato, qui ad horizontalem b pertinet. Rursus series a, h, f, i, c, k, e, b augeo numero 6, quo facto seriebus ipsi a annexis accedit d; tandem series omnes praeter g augeo numero 37, ut ipsa quoque g ad series ipsi a annexas redeat. Unde quadratum (A'') ex (A') sive (H) efficitur seriebus

a, h, f, i, c, k, e	addendo	44,
seriei b	-	43,
- d	-	37,

serie g immutata manente. Cum sit $102+44 = 146$, $508-146 = 362$, quadrati (A'') series horizontales eodem numero 362 augendae sunt, ut quadratum (A''') eruatur. Quadratum (A'), ut supra, per symbolum

(A') $(a+11,\ b+21,\ c+33,\ d,\ e+31,\ f+24,\ g,\ h+11,\ i+22,\ k+24)$

denotando, pro quadratis (A''), (A''') nanciscimur:

(A'') $(a+55,\ b+64,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+68)$,

(A''') $(a+417,\ b+426,\ c+439,\ d+399,\ e+437,\ f+430,\ g+362,\ h+417,\ i+428,\ k+430)$.

Unde in exemplo nostro, ut variabiles paeter t ex x_6 omnes ex decem aequationibus differentialibus propositis eliminentur, eae ad eruendas aequationes auxiliares requisitas 417, 426, 439, 399, 437, 430, 362, 417, 428, 430 vicibus iteratis differentiandae sunt.

Eadem methodo eruimus quadrata (A''), in quibus series horizontales omnes cuilibet serierum $a, b, c, \ldots, k$ annexae sunt, addendo quadrati (A') seriebus

a, h, f, i, c, k, e $+44$; b $+43$; d $+37$; g 0,

b, a, h, f, i, c, k, e $+44$; d $+37$; g 0,

c, k, f, i, e $+44$; b, a, h $+43$; d $+37$; g 0,

$d, b, a, c, e, f, h, i, k$ $+44$; g 0,

e, k $+45$; b, a, h, f, i, c $+44$; d $+38$; g 0,

f $+44$; e, i, k, c $+39$; b, a, h $+38$; d $+32$; g 0,

g $+9$; h $+8$; k, e $+7$; b, a, f, i, c $+6$; d 0,

h $+46$; k, e $+45$; b, a, f, i, c $+44$; d $+38$; g 0,

i, c, k, f, e $+44$; b, a, h $+43$; d $+37$; g 0,

k, e $+45$; b, a, h, f, i, c $+44$; d $+38$; g 0.

Tertium et nonum, quintum et decimum quadratum eadem ratione ex (A') prodire videmus. Modus, quo quadrata illa (A'') ex ipso proposito (A) deducantur, sequentibus schematis indicatur:

	$S.$	(A'')
x_6	146	$(a+55,\ b+64,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+68)$,
x_2	97	$(a+55,\ b+65,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+68)$,
x_1	91	$(a+54,\ b+64,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+54,\ i+66,\ k+68)$,
x_3	105	$(a+55,\ b+65,\ c+77,\ d+44,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+68)$,
x_9	88	$(a+55,\ b+65,\ c+77,\ d+38,\ e+76,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+69)$,
x_8	89	$(a+49,\ b+59,\ c+72,\ d+32,\ e+70,\ f+68,\ g,\ h+49,\ i+61,\ k+63)$,
x_7	100	$(a+17,\ b+27,\ c+39,\ d,\ e+38,\ f+30,\ g+9,\ h+19,\ i+28,\ k+31)$,
x_5	130	$(a+55,\ b+65,\ c+77,\ d+38,\ e+76,\ f+68,\ g,\ h+57,\ i+66,\ k+69)$,
x_{10}	154	$(a+54,\ b+64,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+54,\ i+66,\ k+68)$,
x_4	94	$(a+55,\ b+65,\ c+77,\ d+38,\ e+76,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+69)$.

In quadrati (A') sive (H) seriebus horizontalibus prima, secunda, ..., decima habentur termini stellati

102, 53, 47, 61, 43, 45, 91, 84, 110, 49,

pertinentes ad verticalem

sextam, secundam, primam, tertiam, nonam, octavam, septimam, quintam, decimam, quartam.

Quibus terminis addendo

44, 44, 44, 44, 45, 44, 9, 46, 44, 45,

prodeunt numeri

146, 97, 91, 105, 88, 89, 100, 130, 154, 94,

quos per S denotatos in margine posui una cum variabilibus, quae diversis verticalibus respondent.

In quadrato aliquo (A'') sit S terminus stellatus seriei horizontalis, cui reliquae annexae sunt: ab S ad quemlibet alium terminum stellatum poterit perveniri per continuum transitum termini stellati ad sublineatum eiusdem seriei horizontalis, termini sublineati ad stellatum eiusdem verticalis. Proponamus ex. gr. quadratum primum supra exhibitum

(A'') $(a+55,\ b+64,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+68)$

sive

	α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	$\varkappa$
a					128	146*		89		154
b		96*								
c	91*			93				89		154
d			98*							
e		96	98	93					87*	
f							91	89*		
g							91*			
h					128*					
i	91			93				89		154*
k		96	98	93*					87	

,

in quo solos terminos stellatos et sublineatos seu stellato eiusdem verticalis aequales (omissa lineola) apposui. In eo quadrato series horizontales omnes a serie a pendent, cuius terminus stellatus est 146. De quo ad reliquos terminos stellatos sic descenditur:

146, 154, 93, 96; 146, 154, 91_a; 146, 154, 93, 98; 146, 154, 93, 87;
146, 154, 89; 146, 154, 89, 91_η; 146, 128; 146, 154; 146, 154, 93.

Bini termini iuxta positi T et U sunt stellati tales, ut terminus in serie horizontali ipsius T, verticali ipsius U positus sit ipsi U aequalis sive sublineatus, quae est transitus propositi lex.

Si de quadrato (A'') proposito reicitur termini S, a quo proficiscimur, series verticalis et alia quaecunque horizontalis, in quadrato remanente maximorum transversalium systema facile assignatur. Designemus per $\widehat{TU}$ terminum ipsi U aequalem in serie horizontali ipsius T, verticali ipsius U positum, atque ponamus, seriei horizontalis reiciendae terminum stellatum esse $S^{(l)}$; porro in quadrato proposito (A'') ab S ad $S^{(l)}$ secundum legem stabilitam transiri per terminos stellatos intermedios S', S'', ..., $S^{(l-1)}$. His positis, quadrati propositi (A'') termini stellati reliqui ipsi erunt quadrati remanentis maxima transversalia; in locum autem ipsorum S', S'', ..., $S^{(l)}$ sumendi sunt termini

$$\widehat{SS'},\quad \widehat{S'S''},\quad \widehat{S''S'''},\quad \ldots,\quad \widehat{S^{(l-1)}S^{(l)}},$$

qui termini ipsis S', S'', ..., $S^{(l)}$ aequales sunt. Ex hac propositione colligitur, in quadratis, quae, serie termini S verticali et alia quacunque horizontali reiecta, remanent, eandem fore maximorum transversalium summam, videlicet eadem quantitate S minorem quam in quadrato proposito (A'').

Consideremus quadratum aliquod $(A''_\varkappa)$, in quo seriei horizontalis, cui reliquae omnes annexae sunt, terminus stellatus pertinet ad $\varkappa^{\text{tam}}$ verticalem, quem terminum designabo per $S_\varkappa$. Quadratum illud $(A''_\varkappa)$ ipsum est, quod formari debet, quoties variabiles omnes praeter t et $x_\varkappa$ eliminare proponitur. Statuamus porro, quadratum $(A''_\varkappa)$ provenire addendo quadrati (A) seriebus horizontalibus quantitates

$$h_1^{(\varkappa)},\quad h_2^{(\varkappa)},\quad \ldots,\quad h_m^{(\varkappa)}.$$

Vocemus O ordinem systematis aequationum differentialium propositarum sive summam maximam terminorum transversalium in quadrato (A), sitque $O - S_\varkappa = P_\varkappa$; secundum praecepta supra tradita ad formandum aequationum auxiliarium systema, cuius ope eliminatio proposita praestari possit, m aequationum differentialium propositarum unaquaeque i^{ta} erit $P_\varkappa + h_i^{(\varkappa)}$ vicibus iteratis differentianda. Cui numero $P_\varkappa + h_i^{(\varkappa)}$ significationem memorabilem tribuere licet. Fit in quadrato

$(A_\varkappa'')$ summa maximorum transversalium, quae est terminorum transversalium summa maxima

$$O+h_1^{(\varkappa)}+h_2^{(\varkappa)}+\cdots+h_m^{(\varkappa)}.$$

Unde, si $\varkappa^{\text{tam}}$ seriem verticalem, ι^{tam} horizontalem reicimus, secundum propositionem inventam in quadrato remanente summa maxima terminorum transversalium erit

$$O-S_\varkappa+h_1^{(\varkappa)}+h_2^{(\varkappa)}+\cdots+h_m^{(\varkappa)}=P_\varkappa+h_1^{(\varkappa)}+h_2^{(\varkappa)}+\cdots+h_m^{(\varkappa)}$$

ideoque, si de ipso quadrato (A) reicitur $\varkappa^{\text{ta}}$ series verticalis, ι^{ta} horizontalis, in quadrato remanente summa maxima terminorum transversalium erit $P_\varkappa+h_\iota^{(\varkappa)}$. Hinc problematis hic transacti nacti sumus hanc solutionem:

Problema.

Inter variabilem independentem t et m variabiles dependentes $x_1, x_2, \ldots, x_m$ datae sint aequationes differentiales

$$u_1=0, \quad u_2=0, \quad \ldots, \quad u_m=0;$$

quas si ad unicam aequationem differentialem inter t et $x_\varkappa$ revocare postulatur, propositas aequationes differentiales differentiando novae formandae sunt aequationes auxiliares eaeque necessariae, ut earum beneficio per solas eliminationes sine ullis ulterioribus differentiationibus aequatio differentialis inter t et $x_\varkappa$ prodeat: quaeritur, quot vicibus ad formandum illud aequationum auxiliarum systema aequatio $u_\iota=0$ differentianda sit.

Solutio.

Formetur quadratum m seriebus verticalibus totidemque horizontalibus constans; in α^{ta} verticali, a^{ta} horizontali ponatur ordo differentialis variabilis x_α altissimi, quod in aequatione $u_a=0$ obvenit. De eo quadrato reiecta ι^{ta} serie horizontali, $\varkappa^{\text{ta}}$ verticali, in quadrato remanente quaeratur summa maxima $\sigma_{\iota,\varkappa}$, quam eius assequi possunt $m-1$ termini, omnes in diversis seriebus horizontalibus et in diversis verticalibus positi: ad formandum aequationum auxiliarium systema, cuius ope aequatio differentialis inter t et $x_\varkappa$ nascatur, aequatio $u_\iota=0$ iteratis $\sigma_{\iota,\varkappa}$ vicibus differentianda est. Qui numerus quaesitus $\sigma_{\iota,\varkappa}$ etiam aequatur ordini aequationum differentialium provenientium, si de aequationibus propositis reicimus ipsam $u_\iota=0$, ipsam autem variabilem $x_\varkappa$ pro constante habemus.

Numeri $\sigma_{i,\varkappa} = P_\varkappa + h_i^{(\varkappa)} = 0 - S_\varkappa + h_i^{(\varkappa)}$ ipso quadrato $(A''_\varkappa)$ suppeditantur, quod, quomodo e quadrato (A') deducatur, docui. Dedi supra numerorum $S_\varkappa$ et $h_i^{(\varkappa)}$ valores exemplo proposito respondentes; quibus numeris soluta habentur centum inaequalitatum problemata, videlicet si de quadrato proposito simul una series horizontalis quaecunque et una quaecunque verticalis reiciuntur, in quoque centum quadratorum remanentium summam maximam terminorum transversalium invenire. Facile etiam in horum quadratorum unoquoque ipsi termini transversales summa maxima gaudentes inveniuntur, si ea repetis, quae supra de modo a termino S quadrati (A'') ad alium quemlibet stellatum $S^{(i)}$ per terminos stellatos intermedios transeundi tradidi.

§. 5.

Conditio determinatur, qua fiat, ut systematis aequationum differentialium propositi ordo deprimatur.

Casibus particularibus evenire potest, ut ordo systematis aequationum differentialium non ascendat ad valorem summae maximae terminorum quadrati (A) transversalium. Qui habitus aequationum particularis certa conditione analytica indicatur. Sit rursus $x_\varkappa^{(a_{i,\varkappa})}$ differentiale variabilis $x_\varkappa$ altissimum, quod in aequatione $u_i = 0$ invenitur; differentialium partialium

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1^{(a_{1,1})}}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2^{(a_{1,2})}}, & \dots, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_m^{(a_{1,m})}}, \\
\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1^{(a_{2,1})}}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2^{(a_{2,2})}}, & \dots, & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_m^{(a_{2,m})}}, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\dfrac{\partial u_m}{\partial x_1^{(a_{m,1})}}, & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_2^{(a_{m,2})}}, & \dots, & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_m^{(a_{m,m})}}
\end{array}$$

fingo Determinans, eiusque terminos tantum hos

$$\pm \frac{\partial u_1}{\partial x_{i'}^{(a_{1,i'})}} \frac{\partial u_2}{\partial x_{i''}^{(a_{2,i''})}} \cdots \frac{\partial u_m}{\partial x_{i^{(m)}}^{(a_{m,i^{(m)}})}}$$

conservo, in quibus aggregatum ordinum

$$a_{1,i'} + a_{2,i''} + \dots + a_{m,i^{(m)}}$$

valorem *maximum* O adipiscitur; reliquos omnes Determantis terminos reicio. Terminorum remanentium aggregatum, quod quodammodo est Determinans mutilatum, designo per ∇; *erit*

$$\nabla = 0$$

conditio, qua definitur, aequationum differentialium propositarum systema habitu particulari indutum esse, quo fiat, ut ordo eius deprimatur.

Non evanescente ∇, ordo systematis semper valorem O, theoria generali a me proposita assignatum, assequitur. Quantitatem ∇ voco *systematis aequationum differentialium propositarum Determinans.*

In exemplo nostro fit

$$\nabla = \frac{\partial u_1}{\partial x_6^{(91)}}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_2^{(32)}}\cdot\frac{\partial u_4}{\partial x_3^{(61)}}\cdot\frac{\partial u_6}{\partial x_8^{(21)}}\cdot\frac{\partial u_7}{\partial x_7^{(91)}}\cdot\frac{\partial u_8}{\partial x_5^{(73)}}$$

$$\times\left\{\frac{\partial u_3}{\partial x_1^{(14)}}\cdot\frac{\partial u_9}{\partial x_{10}^{(88)}}-\frac{\partial u_9}{\partial x_1^{(25)}}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_{10}^{(77)}}\right\}\left\{\frac{\partial u_5}{\partial x_4^{(18)}}\cdot\frac{\partial u_{10}}{\partial x_9^{(19)}}-\frac{\partial u_{10}}{\partial x_4^{(25)}}\cdot\frac{\partial u_5}{\partial x_9^{(12)}}\right\}.$$

Huius formulae quatuor termini, qui resolutis uncis proveniunt, respondent quatuor supra a me investigatis systematis terminorum quadrati (A) transversalium summa *maxima* gaudentium. Quoties igitur in exemplo nostro neutra locum habet aequationum

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1^{(14)}}\cdot\frac{\partial u_9}{\partial x_{10}^{(88)}}-\frac{\partial u_9}{\partial x_1^{(25)}}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_{10}^{(77)}}=0,$$

$$\frac{\partial u_5}{\partial x_4^{(18)}}\cdot\frac{\partial u_{10}}{\partial x_9^{(19)}}-\frac{\partial u_{10}}{\partial x_4^{(25)}}\cdot\frac{\partial u_5}{\partial x_9^{(12)}}=0,$$

aequationum differentialium propositarum systema est ordinis 508, sive 508 Constantibus arbitrariis earum integratio completa afficitur. Si vero duarum aequationum antecedentium altera locum habet, systematis ordo valore 508 inferior manet. Quo casu aequationes differentiales propositae praeparatione quadam egent, quae facta esse debet, antequam procedas ad tractandas aequationes differentiales propositas. Systematis aequationum differentialium propositarum Determinans non evanescere, est conditio, cui nisi satisfactum sit, eius ordinem determinare non licet. Quoties inaequalitatum problema, terminos quadrati (A) transversales summa maxima gaudentes determinandi, *unicam* solutionem habet, ordo systematis aequationum differentialium propositarum summae illi maximae aequatur, neque fieri potest, ut inferior evadat. Tum enim systematis Determinans unico termino constat neque potest evanescere.